Correction Liban Mai 2006

Exercice I :

1. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont pour coordonnées respectives $(-5\ ;\ -2\ ;\ 4)$ et $(1\ ;\ 1\ ;\ 1)$.
Or il n'existe pas de réél k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et les points A, B et C ne sont pas alignés, ils forment donc le plan (ABC).

2. (a) La droite (d) admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $(2\ ;\ -3\ ;\ 1)$ (les coefficients de t dans son équation paramétrique voir son cours).
Or
$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{AB} = 2\times(-5)+(-3)\times(-2)+1\times 4 = -10+6+4 = 0$$
et
$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\times 1+(-3)\times 1+1\times 1 = 2-3+4 = 0$$
Donc la droite (d) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (ABC), les droites (AB) et (AC), ainsi (d) est perpendiculaire au plan (ABC) et un vecteur normal au plan (ABC) est $\overrightarrow{u}$.

   (b) Donc (ABC) a pour équation : $2x-3y+z+d=0$.
Mais comme A appartient à (ABC), on a : $2\times 2-3\times 1+3\times 1+d=0 \Leftrightarrow d=-4$.
Donc le plan (ABC) a pour équation cartésiennne :
$$2x-3y+z-4=0$$

3. Appelons G le barycentre de (A ;-2), (B ;-1) et (C ;2), alors G appartient au plan (ABC) (cf cours).
Montrons que G appartient à la droite (d). Pour cela, calculons les coordonnées de G :
$$x_G = \frac{-2\times 2+(-1)\times(-3)+2\times 3}{-2-1+2} = -5$$
$$y_G = \frac{-2\times 1+(-1)\times(-1)+2\times 2}{-2-1+2} = -3$$
$$z_G = \frac{-2\times 3+(-1)\times 7+2\times 4}{-2-1+2} = 5$$
Déterminons, s'il existe un réel t vérifiant :
$$\begin{cases} -5 = -7+2t \\ -3 = -3t \\ 5 = 4+t \end{cases} \Leftrightarrow t=1$$
Ainsi G appartient à la droite (d), mais aussi au plan (ABC) donc (comme (d) est perpendiculaire à (ABC) il ne peut y avoir qu'un point d'intersection), le point d'intersection de (ABC) avec (d) est le barycentre de (A ;-2), (B ;-1) et (C ;2), c'est à dire H.

4. Comme $\left(-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)=0 \Leftrightarrow -\overrightarrow{MH}\cdot\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)=0$, alors l'ensemble Γ_1 des points M de l'espace vérifiant $\left(-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)=0$ est le plan de vecteur normal $\overrightarrow{BC}$ passant par H.

5. Comme $\|-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\|=\sqrt{29} \Leftrightarrow \|-\overrightarrow{MH}\|=\sqrt{29}$, alors l'ensemble Γ_2 des points M de l'espace vérifiant $\|-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\|=\sqrt{29}$ est la sphère de centre H et de rayon $\sqrt{29}$.

6. Comme la sphère est de centre H et le plan passant par H, alors l'intersection de Γ_1 et Γ_2 est le cercle de centre H et de rayon $\sqrt{29}$.

7. Comme les vecteurs $\overrightarrow{SH}$ et $\overrightarrow{CB}$ ont pour coordonnées respectives $(3\ ;\ -4\ ;\ 2)$ et $(-6\ ;\ -3\ ;\ 3)$, donc
$$\overrightarrow{SH}\cdot\overrightarrow{CB} = -18+12+6 = 0$$

Ainsi S appartient à Γ_1.

Et
$$\|\overrightarrow{SH}\| = \sqrt{9+16+4} = \sqrt{29}$$
Donc S appartient aussi à Γ_2, donc S appartient à l'intersection de Γ_1 et Γ_2.

Exercice II :

1. (a) Comme B_1 est l'image de B, d'affixe 2, par l'homothétie de centre A, d'affixe i, et de rapport $\sqrt{2}$, alors son affixe est :
$$\sqrt{2}(2-\mathrm{i})+\mathrm{i} = 2\sqrt{2}+\mathrm{i}(1-\sqrt{2})$$
   (b) Comme B' est l'image de B_1 par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$, alors son affixe est :
$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}(2\sqrt{2}+\mathrm{i}(1-\sqrt{2})-\mathrm{i})+\mathrm{i} &= \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})\left(2\sqrt{2}-\mathrm{i}\sqrt{2}\right)+\mathrm{i} \\ &= \frac{2}{2}(1+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})+\mathrm{i} \\ &= 3+2\mathrm{i} \end{aligned}$$

2. (a) L'image de B par la transformation f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = (1+\mathrm{i})z+1$ a pour affixe :
$$(1+\mathrm{i})\times 2+1 = 3+2\mathrm{i}$$
   Donc l'image de B est bien B'.

   (b) Un point M d'affixe z est invariant par f si et seulement si :
$$\begin{aligned} z' = z &\Leftrightarrow (1+\mathrm{i})z+1 = z \\ &\Leftrightarrow \mathrm{i}z = -1 \\ &\Leftrightarrow z = -\frac{1}{\mathrm{i}} = \mathrm{i} \end{aligned}$$
   Donc le point A est le seul point invariant par f.

   (c) Pour tout nombre complexe distinct de i,
$$\begin{aligned} \frac{z'-z}{\mathrm{i}-z} &= \frac{(1+\mathrm{i})z+1-z}{\mathrm{i}-z} \\ &= \frac{\mathrm{i}z-1}{\mathrm{i}-z} \\ &= \frac{-\mathrm{i}(\mathrm{i}-z)}{\mathrm{i}-z} = -\mathrm{i} \end{aligned}$$
   Or
$$\frac{\mathrm{MM'}}{\mathrm{MA}} = \left|\frac{z'-z}{\mathrm{i}-z}\right| = |-\mathrm{i}| = 1 \Leftrightarrow \mathrm{MM'} = \mathrm{MA}$$
   Donc M' appartient au cercle de centre M et de rayon AM.

   De plus,
$$\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MM'}\right) = arg\left(\frac{z'-z}{\mathrm{i}-z}\right) = arg(-\mathrm{i}) = -\frac{\pi}{2}$$
   Ainsi M' est le point du cercle de centre M et de rayon AM tel que : $\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MM'}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$.

3. (a) Comme $|z-2| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \mathrm{BM} = \sqrt{2}$, alors l'ensemble Σ_1 des points M d'affixe z vérifiant $|z-2| = \sqrt{2}$ est le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{2}$.

(b) De plus,

$$z' - 3 - 2\mathrm{i} = (1+\mathrm{i})z + 1 - 3 - 2\mathrm{i} = (1+\mathrm{i})z + 1 - 2(1+\mathrm{i}) = (1+\mathrm{i})(z-2)$$

D'où :

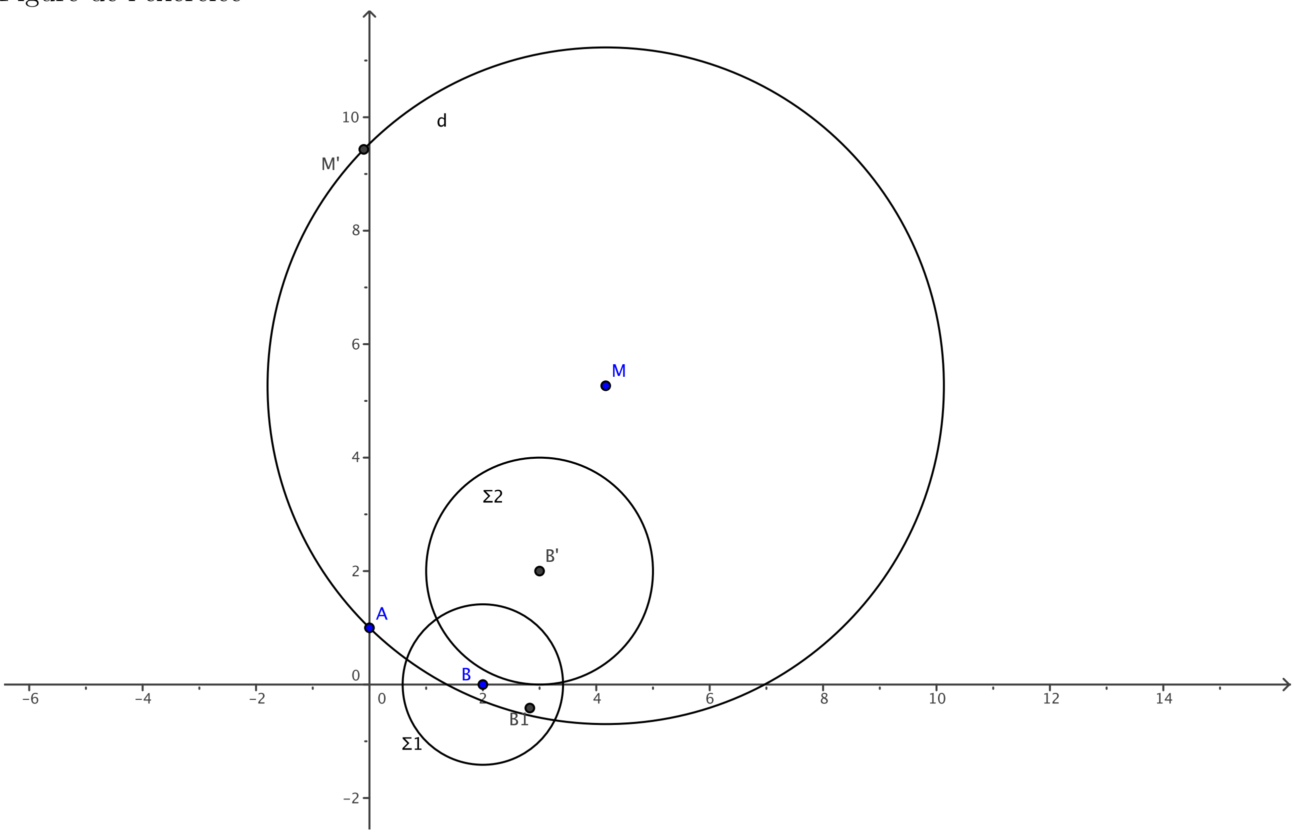
$$|z' - 3 - 2\mathrm{i}| = |(1+\mathrm{i})(z-2)| = |1+\mathrm{i}||z-2| = \sqrt{2}|z-2|$$

Donc si M appartient à Σ_1, $|z-2| = \sqrt{2}$ et

$$|z' - 3 - 2\mathrm{i}| = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2 \Leftrightarrow \mathrm{M'B'} = 2$$

Donc si M appartient à Σ_1, alors M' appartient au cercle de centre B' et de rayon 2.

(c) Figure de l'exercice



Exercice III : Partie A :

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = x\ln(x+1)$

1. (a) f est dérivable sur $[0;+\infty[$, et

$$f'(x) = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1}$$

Mais sur $[0;+\infty[$, $\ln(x+1) \geqslant 0$ et $\frac{x}{x+1} \geqslant 0$, donc $f'(x) \geqslant 0$.
Ainsi f est croissante sur $[0;+\infty[$.

(b) Comme $f'(0) = 0$ et $f(0) = 0$, alors la tangente au point d'abscisse 0 est $y = 0$, c'est à dire l'axe des abscisses.

2. (a) Déterminons les réels a, b et c tels que pour tout réel $x \neq -1$:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1} \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 = (ax+b)(x+1) + c \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 = ax^2 + (a+b)x + b + c \end{aligned}$$

Donc $\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases}$

Ainsi pour tout réel $x \neq -1$:

$$\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$$

(b) Ainsi

$$\begin{aligned} I = \int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 - x + \ln(x+1)\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} - 1 + \ln(1+1) = -\frac{1}{2} + \ln 2 \end{aligned}$$

3. Or sur $[0;+\infty[$, $x \geqslant 0$ et $\ln(x+1) \geqslant 0$, alors f est positive sur $[0;+\infty[$, donc l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites $x = 0$, $x = 1$ et $y = 0$ est :

$$\mathcal{A} = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

Intégrons par parties :

$$\begin{array}{ll} u' = x & u = \frac{1}{2}x^2 \\ v = \ln(x+1) & v' = \frac{1}{x+1} \end{array}$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \left[\frac{1}{2}x^2\ln(x+1)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}\frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2\ln(x+1)\right]_0^1 - \frac{1}{2}\mathrm{I} \\ &= \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + \ln 2\right) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

4. Comme f est continue et strictement croissante sur $[0\,;1]$ à valeurs dans $[f(0); f(1)] = [0; \ln 2 \approx 0,6]$, alors l'équation $f(x) = 0,25$ admet une unique solution α sur $[0\,;1]$ de valeur approchée

Partie B :

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1)\,\mathrm{d}x$.

1.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \int_0^1 x^{n+1}\ln(x+1)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 x^n \ln(x+1)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left(x^{n+1}\ln(x+1) - \int_0^1 x^n\ln(x+1)\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left(x^n(x-1)\ln(x+1)\right)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Mais sur $[0\,;1]$, $x^n \geqslant 0$, $x - 1 \leqslant 0$ et $\ln(x+1) \geqslant 0$, donc $x^n(x-1)\ln(x+1) \leqslant 0$.
Donc

$$\int_0^1 \left(x^n(x-1)\ln(x+1)\right)\,\mathrm{d}x \leqslant 0 \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n \leqslant 0$$

Ainsi la suite u est décroissante, comme de plus, u est minorée par 0 alors la suite u converge.

2. Sur $[0\,;1]$, $0 \leqslant \ln(x+1) \leqslant \ln 2$ puisque la fonction ln est croissante.
   Donc sur $[0\,;1]$,

$$\begin{aligned} 0 \leqslant x^n \ln(x+1) \leqslant x^n \ln 2 \quad &\Leftrightarrow \quad 0 \leqslant \int_0^1 x^n \ln(x+1)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n \ln(2)\,\mathrm{d}x \\ &\Leftrightarrow \quad 0 \leqslant u_n \leqslant \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln 2\right]_0^1 \\ &\Leftrightarrow \quad 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n+1}\ln 2 \end{aligned}$$

   Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$, donc (théorème des gendarmes), $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice IV : La probabilité qu'un robot tombe en panne avant l'instant t est :

$$p(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

1.

$$\begin{aligned} p(X > 6) = 0,3 \quad &\Leftrightarrow \quad 1 - p(X \leqslant 6) = 0,3 \\ &\Leftrightarrow \quad 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-6\lambda}\right) = 0,3 \\ &\Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^{-6\lambda} = 0,3 \\ &\Leftrightarrow \quad -6\lambda = \ln 0,3 \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda = -\frac{\ln 0,3}{6} \end{aligned}$$

2. L'instant t pour lequel la probabilité qu'un robot tombe en panne pour la première fois soit de 0,5 vérifie :

$$\begin{aligned} p(X \leqslant t) = 0,5 \quad &\Leftrightarrow \quad 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t} = 0,5 \\ &\Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^{-\lambda t} = 0,5 \\ &\Leftrightarrow \quad -\lambda t = \ln 0,5 \\ &\Leftrightarrow \quad t = -\frac{\ln 0,5}{\lambda} \approx 3,5 \text{ ans} \end{aligned}$$

3. La probabilité que le robot n'ait pas de panne au cours des deux premières années est :

$$p(X \geqslant 2) = 1 - p(X \leqslant 2) = \mathrm{e}^{-2\lambda} = \mathrm{e}^{-0,4}$$

4. Sachant qu'un robot n'a pas eu de panne au cours des deux premières années, la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de six ans est :

$$p(X \geqslant 6 / X \geqslant 2) = p(X \geqslant 4) = \mathrm{e}^{-0,8}$$

5. Dans un lot de 10 robots fonctionnant de manière indépendante et donc des durées de vie indépendantes, la probabilité qu'au moins un robot n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années est, en passant par l'événement contraire :

$$1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-0,4}\right)^{10}$$