Baccalauréat S Liban mai 2006

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on donne les points A(2 ; 1 ; 3), B(−3 ; −1 ; 7) et C(3 ; 2 ; 4).

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. Soit (d) la droite de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& -7+2t \\ y &=& -3t \\ z &=& 4+t \end{array}\right.$

a. Montrer que la droite (d) est orthogonale au plan (ABC).

b. Donner une équation cartésienne du plan (ABC).

3. Soit H le point commun à la droite (d) et au plan (ABC).

a. Montrer que H est le barycentre de (A ; −2), (B ; −1) et (C ; 2).

b. Déterminer la nature de l'ensemble Γ_1, des points M de l'espace tels que

$$\left(-2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right) = 0$$

En préciser les éléments caractéristiques.

c. Déterminer la nature de l'ensemble Γ_2, des points M de l'espace tels que

$$\left\|-2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right\| = \sqrt{29}$$

En préciser les éléments caractéristiques.

d. Préciser la nature et donner les éléments caractéristiques de l'intersection des ensembles Γ_1 et Γ_2.

e. Le point S (−8 ; 1 ; 3) appartient-il à l'intersection des ensembles Γ_1 et Γ_2.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On prendra 2 cm pour unité graphique.

Soit A le point d'affixe i et B le point d'affixe 2.

1. a. Déterminer l'affixe du point B_1 image de B par l'homothétie de centre A et de rapport $\sqrt{2}$.

b. Déterminer l'affixe du point B′ image de B_1 par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.

Placer les points A, B et B′.

2. On appelle f la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que

$$z' = (1+\mathrm{i})z + 1.$$

a. Montrer que B a pour image B′ par f.

b. Montrer que A est le seul point invariant par f.

c. Établir que pour tout nombre complexe z distinct de i, $\dfrac{z'-z}{\mathrm{i}-z} = -\mathrm{i}$.
Interpréter ce résultat en termes de distances puis en termes d'angles.
En déduire une méthode de construction de M′ à partir de M, pour M distinct de A.

3. a. Donner la nature et préciser les éléments caractéristiques de l'ensemble Σ_1 des points M du plan dont l'affixe z vérifie $|z-2| = \sqrt{2}$.
b. Démontrer que $z' - 3 - 2\mathrm{i} = (1+\mathrm{i})(z-2)$.
En déduire que si le point M appartient à Σ_1, alors son image M' par f appartient à un cercle Σ_2, dont on précisera le centre et le rayon.
c. Tracer Σ_1 et Σ_2 sur la même figure que A, B et B′.

EXERCICE 2 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans le plan complexe muni du repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les points A d'affixe 3i et B d'affixe 6 ; unité graphique : 1 cm.

Partie A

1. Montrer qu'il existe une similitude directe et une seule qui transforme A en O et O en B. Préciser ses éléments caractéristiques.
2. Montrer qu'il existe une similitude indirecte et une seule qui transforme A en O et O en B.

Partie B

1. Soit f la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = -2\mathrm{i}\overline{z} + 6$ où $\overline{z}$ désigne le conjugué de z.
Montrer que f possède un point invariant et un seul. On note K ce point.
2. Soit h l'homothétie de centre K et de rapport $\dfrac{1}{2}$.
On pose $g = f \circ h$.
   a. Montrer que g est une isométrie laissant invariant le point K.
   b. On désigne par M'' l'image du point M d'affixe z par la transformation g.
   Montrer que l'écriture complexe de g est $z'' = -\mathrm{i}\overline{z} + 2 + 2\mathrm{i}$ où z'' est l'affixe de M''.
   c. Montrer qu'il existe sur l'axe $\left(\mathrm{O}, \vec{v}\right)$ un unique point invariant par g ; on le note L.
   Reconnaître alors la transformation g.
   d. En déduire que la transformation f est la composée d'une homothétie h' suivie de la réflexion d'axe (KL). Préciser les éléments caractéristiques de h'.
3. Déterminer les droites Δ telles que $f(\Delta)$ et Δ soient parallèles.

EXERCICE 3 — 7 points

Commun à tous les candidats

Partie A : étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x\ln(x+1).$$

Sa courbe représentative $(\mathscr{C})$ dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ est donnée en annexe.

1. **a.** Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

   b. L'axe des abscisses est-il tangent à la courbe $(\mathscr{C})$ au point O ?

2. On pose $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x$.

   a. Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout $x \neq -1$,

$$\frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}.$$

   b. Calculer I.

3. À l'aide d'une intégration par parties et du résultat obtenu à la question 2, calculer, en unités d'aires, l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathscr{C})$ et les droites d'équations $x = 0$, $x = 1$ et $y = 0$.

4. Montrer que l'équation $f(x) = 0,25$ admet une seule solution sur l'intervalle $[0\,;\,1]$. On note α cette solution. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie B : étude d'une suite

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \ln(x+1)\,\mathrm{d}x$.

1. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
   La suite (u_n) converge-t-elle ?

2. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{\ln 2}{n+1}$.
   En déduire la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 4 **3 points**

Commun à tous les candidats La durée de vie d'un robot, exprimée en années, jusqu'à ce que survienne la première panne est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, avec $\lambda > 0$.
Ainsi, la probabilité qu'un robot tombe en panne avant l'instant t est égale à

$$p(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x.$$

1. Déterminer λ, arrondi à 10^{-1} près, pour que la probabilité $p(X > 6)$ soit égale à 0,3.
   Pour la suite de l'exercice, on prendra $\boldsymbol{\lambda = 0,2}$.

2. À quel instant t, à un mois près, la probabilité qu'un robot tombe en panne pour la première fois est-elle de $0,5$?

3. Montrer que la probabilité qu'un robot n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années est $\mathrm{e}^{-0,4}$.

4. Sachant qu'un robot n'a pas eu de panne au cours des deux premières années, quelle est, à 10^{-2} près, la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de six ans ?

5. On considère un lot de 10 robots fonctionnant de manière indépendante.
   Déterminer la probabilité que, dans ce lot, il y ait au moins un robot qui n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années.

Annexe

Exercice3

Représentation graphique de la fonction f obtenue à l'aide d'un tableur

Courbe ($\mathscr{C}$)