Correction du sujet national, juin 2006

Exercice 1

On ne demandait pas de justification ; celles-ci sont données à but pédagogique

1. L'équation $2x+2y-z-11=0$ est l'équation d'un plan $\mathscr{P}$.
   - $2x_A+2y_A-z_A-11=2\times2+2\times4-1-11=0$ donc A appartient à $\mathscr{P}$.
   - $2x_B+2y_B-z_B-11=2\times0+2\times4-(-3)-11=0$ donc B appartient à $\mathscr{P}$.
   - $2x_C+2y_C-z_C-11=2\times3+2\times1-(-3)-11=0$ donc C appartient à $\mathscr{P}$.

   $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\0\\-4\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-3\\-4\end{pmatrix}$.

   Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. Les trois points A, B et C ne sont pas alignés et appartiennent au plan $\mathscr{P}$, donc ce plan est le plan (ABC). L'affirmation est donc **vraie**.
2. $2x_E+2y_E-z_E-11=2\times3+2\times2-(-1)-11=0$ donc E appartient à (ABC).

   Le vecteur $\overrightarrow{DE}$ a pour coordonnées : $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$. Alors : $\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{AB}=-4+0-4\neq0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas orthogonaux. Le point E n'est donc pas le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC). L'affirmation est **fausse**.
3. $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=4+0-4=0$. Les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux donc les droites (AB) et (CD) aussi. L'affirmation est **vraie**.
4. Le point C n'appartient pas à la droite dont on donne la représentation paramétrique. En effet, si c'était le cas, il existerait un réel t tel que : $\left\{\begin{array}{lcl}-1+2t&=&3\\-1+t&=&1\\1-t&=&-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{lcl}t&=&2\\t&=&2\\t&=&4\end{array}\right.$, ce qui est impossible. Par conséquent, l'affirmation est **fausse**.
5. $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}-\frac{7}{5}\\0\\-\frac{14}{5}\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}=\frac{10}{7}\overrightarrow{AI}$. Les deux vecteurs sont colinéaires, donc I appartient bien à la droite (AB). L'affirmation est **vraie**.

Il fallait donc répondre : **V-F-V-F-V**

Exercice 2

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^2e^{1-x}$.
   (a) $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-x)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{1-x}=+\infty$ par le théorème de composition des limites. Comme on a aussi $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$, on en déduit que : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty}$.

   Pour tout x, on a : $f(x)=ex^2e^{-x}=e\dfrac{x^2}{e^x}$.

   D'après le théorème de croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=0$. On en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0}$.

   L'axe (Ox) est donc asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

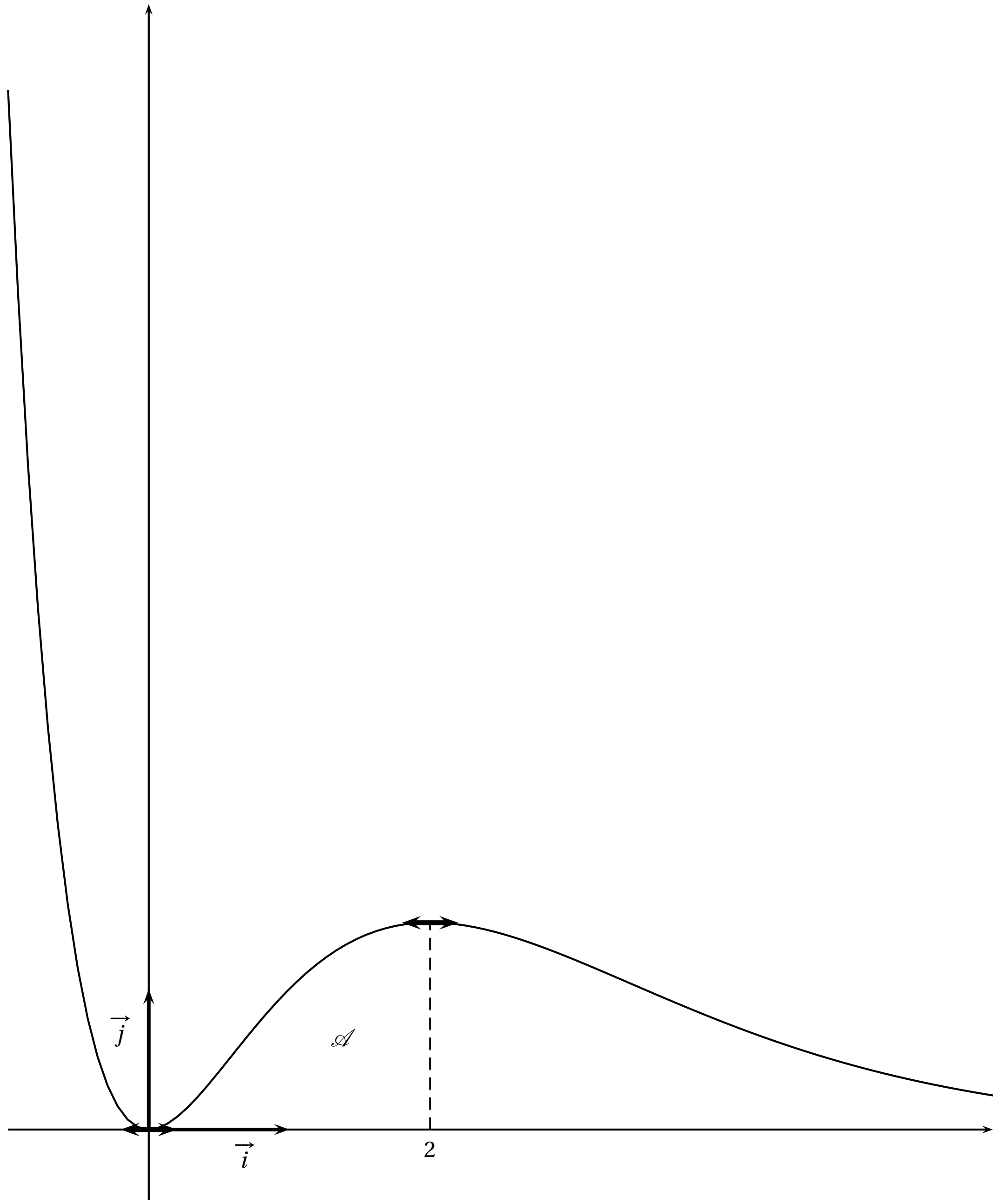
   (b) f est dérivable comme produit et composée de fonctions dérivables ;

   pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x)=2xe^{1-x}-x^2e^{1-x}=(2x-x^2)e^{1-x}=\boxed{x(2-x)e^{1-x}}$.

   (c) Pour tout x, $e^{1-x}>0$ donc $f'(x)$ est du signe de $x(2-x)$ qui est strictement positif entre ses racines donc sur $]0\,;\,2[$, nul en 0 et 2 et négatif ailleurs.
   On en déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	2	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{4}{e}$	↘	0

   Courbe :


$\vec{j}$
$\mathscr{A}$
$\vec{i}$
2

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \mathrm{e}^{1-x} \mathrm{d}\,x$.

(a) $I_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 x^{n+1} \mathrm{e}^{1-x} \mathrm{d}\,x$.

Prenons $\left\{\begin{array}{lcl} u_{n+1}(x) & = & x^{n+1} \\ v'(x) & = & \mathrm{e}^{1-x}\end{array}\right.$. Alors : $\left\{\begin{array}{lcl} u'_{n+1}(x) & = & (n+1)x^n \\ v(x) & = & -\mathrm{e}^{1-x}\end{array}\right.$.

u_{n+1} et v ont des dérivées continues donc on peut appliquer la formule d'intégration par parties.

On a : $I_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 u_{n+1}(x)v'(x)\mathrm{d}\,x = [u_{n+1}(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'_{n+1}(x)v(x)\mathrm{d}\,x$

$= \left[-x^{n+1}\mathrm{e}^{1-x}\right]_0^1 + \displaystyle\int_0^1 (n+1)x^N \mathrm{e}^{1-x}\mathrm{d}\,x = -1 + (n+1)I_n$.

Par conséquent, pour tout n, on a : $\boxed{I_{n+1} = (n+1)I_n - 1}$.

(b) La même formule d'intégration par parties donne :

$I_1 = \displaystyle\int_0^1 x^1 \mathrm{e}^{1-x}\mathrm{d}\,x = \left[-x\mathrm{e}^{1x}\right]_0^1 + \int_0^1 \mathrm{e}^{1x}\mathrm{d}\,x = -1 + \left[-\mathrm{e}^{1-x}\right]_0^1 = -1 + (-1 + \mathrm{e}) = \boxed{\mathrm{e} - 2}$.

En appliquant la formule précédente, on trouve : $I_2 = 2I_1 - 1 = \boxed{2\mathrm{e} - 5}$.

(c) On remarque que $I_2 = \displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}\,x$ donc comme f est une fonction positive, I_2 représente l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe (Ox) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

3. (a) Pour tout x de $[0\,;\,1]$, on a : $0 \leqslant x \leqslant 1$ donc $-1 \leqslant -x \leqslant 0$, d'où $0 \leqslant 1 - x \leqslant 1$ qui donne $1 \leqslant \mathrm{e}^{1-x} \leqslant \mathrm{e}$ (en appliquant la fonction exponentielle qui est croissante) et finalement $x^n \leqslant x^n \mathrm{e}^{1-x} \leqslant \mathrm{e}x^n$ (en multipliant par x^n qui est positif).

(b) En utilisant les propriétés de l'intégrale, on obtient :

$\displaystyle\int_0^1 x^n \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}x^n \mathrm{d}x$ soit $\left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \leqslant I_n \leqslant \mathrm{e}\left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$.

Par conséquent : $\boxed{\dfrac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}}$.

Quand n tend vers $+\infty$, $\dfrac{1}{n+1}$ et $\dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$ tendent vers 0 donc I_n tend aussi vers 0 (théorème des gendarmes). $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0}$.

Exercice 3 (pour ceux n'ayant pas choisi la spécialité)

1. (a) Soit z un nombre complexe non nul. $z \times \dfrac{1}{z} = 1$ donc d'après les prérequis, $\arg\left(z \times \dfrac{1}{z}\right) = \arg(z) + \arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = \arg(1) = 0 + 2k\pi$. Par conséquent : $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg(z) + 2k\pi$.

Alors, pour tous nombres complexes z et z' non nuls :

$\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg\left(z \times \dfrac{1}{z'}\right) = \arg(z) + \arg\left(\dfrac{1}{z'}\right) = \arg(z) + (-\arg(z')) = \arg(z) - \arg(z') + 2k\pi$.

(b) Soient A, B et C trois points du plan, deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b et c.

Alors : $\arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) = \arg(c-a) - \arg(b-a) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AC}) - (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB})$ (d'après le prérequis) $= (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ (d'après la relation de Chasles).

2. Soit f l'application de $P \setminus \{O\}$ dans $P \setminus \{O\}$ qui, à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ avec $z' = \dfrac{1}{\overline{z}}$.

(a) Pour tout $z \neq 0$, $\arg(z') = \arg\left(\dfrac{1}{\overline{z}}\right) = -\arg(\overline{z}) = \arg(z) + 2k\pi$. $\boxed{\arg(z') = \arg(z) + 2k\pi}$.

On en déduit que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM'}) + 2k\pi$ donc M et M' appartiennent à une **même demi-droite d'origine** O.

(b) $f(M) = M$ équivaut à $\dfrac{1}{\overline{z}} = z$ donc à $z\overline{z} = 1$ c'est-à-dire à $|z|^2 = 1$ donc à $|z| = 1$.

$\boxed{\text{L'ensemble des points invariants par } f \text{ est le cercle de centre } O \text{ et de rayon } 1}$.

(c) Pour tout $z \neq 0$:

$$\frac{z'-1}{z'-\mathrm{i}} = \frac{\frac{1}{\overline{z}} - 1}{\frac{1}{\overline{z}} - \mathrm{i}} = \frac{1 - \overline{z}}{1 - \mathrm{i}\overline{z}} = \frac{1-\overline{z}}{\mathrm{i}(-\mathrm{i} - \overline{z}} = \frac{1}{\mathrm{i}}\,\frac{\overline{z}-1}{\overline{z}+\mathrm{i}} = \frac{1}{\mathrm{i}}\,\frac{\overline{z-1}}{\overline{z-\mathrm{i}}} = \frac{1}{\mathrm{i}}\overline{\left(\frac{z-1}{z-\mathrm{i}}\right)}$$

donc $\boxed{\dfrac{z'-1}{z'-\mathrm{i}} = \dfrac{1}{\mathrm{i}}\overline{\left(\dfrac{z-1}{z-\mathrm{i}}\right)}}$

On en déduit que : $\arg\left(\dfrac{z'-1}{z'-\mathrm{i}}\right) = \arg\left(\dfrac{1}{\mathrm{i}}\right) + \arg\left(\overline{\left(\dfrac{z-1}{z-\mathrm{i}}\right)}\right) = \arg(-\mathrm{i}) - \arg\left(\dfrac{z-1}{z-\mathrm{i}}\right) = -\dfrac{\pi}{2} - \arg\left(\dfrac{z-1}{z-\mathrm{i}}\right) + 2k\pi$.

3. (a) Soit z tel que $z \neq 1$ et $z \neq \mathrm{i}$. (donc $M \neq U$ et $M \neq V$).
M appartient à la droite (UV) privée de U et V si et seulement si $(\overrightarrow{MU}, \overrightarrow{MV}) = k\pi$ c'est-à-dire $\arg\left(\dfrac{z-1}{z-\mathrm{i}}\right) = k\pi$ donc si et seulement si $\dfrac{z-1}{z-\mathrm{i}}$ est réel non nul.

(b) $M(z)$ est un point de la droite (UV) privée de U et V si et seulement si $\arg\left(\dfrac{z-1}{z-\mathrm{i}}\right) = k\pi$ (d'après la question précédente) donc $\arg\left(\dfrac{z'-1}{z'-\mathrm{i}}\right) = -\dfrac{\pi}{2} - \arg\left(\dfrac{z-1}{z-\mathrm{i}}\right) = \pm\dfrac{\pi}{2} + 2k'\pi$ c'est-à-dire $(\overrightarrow{M'V}, \overrightarrow{M'U}) = \pm\dfrac{\pi}{2} + 2k'\pi$.
M' décrit alors le cercle de diamètre $[UV]$, privé des points U, V et O .

Exercice 3 (pour ceux ayant choisi la spécialité)

Partie A :

1. **Théorème de Bézout :** Deux entiers relatifs x et y sont premiers entre eux si et seulement s'il existe deux entiers u et v tels que $ux + vy = 1$.

   Théorème de Gauss : Soient trois entiers relatifs a, b et c. Si a divise bc et si a et b sont premiers entre eux, alors a divise c.

2. **Démontrons le théorème de Bézout :**
   On suppose que a et b sont premiers entre eux et que a divise bc.
   Comme a et b sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bézout, il existe u et v relatifs tels que $ua + vb = 1$.
   Alors : $uac + vbc = c$. Comme a divise bc, il existe k relatif tel que $bc = ka$.
   On en déduit : $uac + kav = c$ donc $a(uc + kv) = c$. $uc + kv$ est un entier relatif (somme et produit de relatifs) donc a divise c.

Partie B :

On considère le système (S) $\left\{\begin{array}{lcll} n & \equiv & 13 & (19) \\ n & \equiv & 6 & (12) \end{array}\right.$

1. 19 est un nombre premier donc 19 et 12 sont premiers entre eux ; d'après le théorème de Bézout, il existe deux entiers relatifs u et v tels que $19u + 12v = 1$.
   On pose alors $N = 13 \times 12v + 6 \times 19u$.
   $N = 13(1 - 19u) + 6 \times 19u = 13 - 1319u + 6 \times 19u \equiv 13(19)$.
   $N = 13 \times 12v + 6 \times (1 - 12v) = 13 \times 12v + 6 - 6 \times 12v \equiv 6(12)$.
   N est bien solution du système S.

2. (a) Soit n_0 une solution de (S).
   n est solution de (S) si et seulement si $\left\{\begin{array}{lcll} n & \equiv & 13 & (19) \\ n & \equiv & 6 & (12) \end{array}\right.$ c'est-à-dire $\left\{\begin{array}{lcllcl} n & \equiv & 13 & \equiv & n_0 & (19) \\ n & \equiv & 6 & \equiv & n_0 & (12) \end{array}\right.$
   donc (S) équivaut à $\left\{\begin{array}{lcll} n & \equiv & n_0 & (19) \\ n & \equiv & n_0 & (12) \end{array}\right.$.

   (b) • Si $n \equiv n_0(12 \times 19)$ alors il est clair que $n \equiv n_0(19)$ et $n \equiv n_0(12)$ donc que $\left\{\begin{array}{lcll} n & \equiv & n_0 & (19) \\ n & \equiv & n_0 & (12) \end{array}\right.$.

   • **Réciproquement :**
   Si $\left\{\begin{array}{lcll} n & \equiv & n_0 & (19) \\ n & \equiv & n_0 & (12) \end{array}\right.$, alors il existe k et k' entiers relatifs tels que $n - n_0 = 19k$ et $n - n_0 = 12k'$ donc $19k = 12k'$.
   19 divise donc $12k'$. Comme 12 et 19 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, 19 divise k' donc $k' = 12k''$, $k'' \in \mathbb{Z}$. Alors $n - n_0 = 12 \times 19k''$ donc $n \equiv n_0(12 \times 19)$.
   On a montré que $\left\{\begin{array}{lcll} n & \equiv & n_0 & (19) \\ n & \equiv & n_0 & (12) \end{array}\right.$ équivaut à $n \equiv n_0\ (12 \times 19)$.

3. (a) Appliquons l'algorithme d'Euclide :
   On a successivement :
   $19 = 1 \times 12 + 7$
   $12 = 7 \times 1 + 5$
   $7 = 5 \times 1 + 2$
   $5 = 2 \times 2 + 1$
   d'où $1 = 5 - 2\times 2 = 5 - 2(7 - 5\times 1) = 5\times 3 - 2\times 7 = (12 - 7)\times 3 - 2\times 7 = 12\times 3 - 7\times 5 = 12\times 3 - (19)12)\times 5 = \boxed{12 \times 8 - 19 \times 5}$.
   Un couple $(u\,;\ v)$ est : $\boxed{(u\,;\ v) = (-5\,;\,8)}$.

Alors $\boxed{N = 13 \times 12 \times 8 + 6 \times 19 \times (-5) = \boxed{678}}$.

(b) $N = 678$ est une solution de S. D'après la question $2b$), les solutions de (S) sont tous les nombres n tels que $n \equiv N\ (12 \times 19)$ c'est-à-dire $n \equiv 678\ (228)$. (car $12 \times 19 = 228$)
$\boxed{\mathscr{S} = \{678 + 228k,\ k \in \mathbb{Z}\}}$

4. Soit n un entier tel que, si on le divise par 12, le reste est 6 et si on le divise par 19, le reste est 13. n est donc une solution de (S). Alors $n \equiv 678\ (228) \equiv 222\ (228)$. Le reste r de la division de n par $228 = 12 \times 19$ est $\boxed{222}$.

Exercice 4

1. Notons C l'événement « le ballon est crevé ». Alors $p(C) = 0,2$.

   (a) La probabilité que la ballon soit intact au bout de deux tirs est $p(\overline{C} \cap \overline{C})$. Comme les tirs sont indépendants, on a : $p(\overline{C} \cap \overline{C}) = p(\overline{C})^2 = (1 - p(C))^2 = 0,8^2 = 0,64$.

   (b) Calculons la probabilité que deux tirs suffisent pour crever le ballon. L'événement contraire est : « deux tirs ne suffisent pas », autrement dit, le ballon n'est pas crevé au bout de deux tirs. C'est l'événement contraire de celui étudié au a). Sa probabilité vaut 1-0,64=0,36.

   (c) Calculons la probabilité p_n que n tirs suffisent pour crever le ballon. L'événement contraire est « le ballon n'est pas crevé au bout de n tirs », de probabilité $(p(\overline{C})^n = 0,8^n$ (car les tirs sont indépendants).
   Par conséquent : $\boxed{p_n = 1 - 0,8^n}$.

   (d) $p_n > 0,99$ équivaut à $1 - 0,8^n > 0,99$ c'est-à-dire à $0,8^n < 0,01$.
   La fonction ln étant croissante, on trouve $n \ln 0,8 < \ln 0,01$ donc $n > \dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,8}$ soit $\boxed{n \geqslant 21}$.
   $\boxed{\text{Il faut que } n \geqslant 21 \text{ pour que } p_n > 0,99}$.

2. Pour chaque valeur de k compris entre 1 et 4, la probabilité de crever le ballon est la probabilité p_k, calculée en 1) c) : $p_k = 1 - 0,8^k$.
   Le dé n'est pas pipé donc chaque face a la même probabilité de sortie égale à $\dfrac{1}{4}$.
   La probabilité de crever le ballon est : $\dfrac{1}{4}(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) = \boxed{0,4096}$.

3. (a) Les fréquences sont : $f_1 = \dfrac{58}{200} = \dfrac{29}{100}$; $f_2 = \dfrac{49}{200}$; $f_3 = \dfrac{52}{200} = \dfrac{13}{50}$ et $f_4 = \dfrac{41}{200}$.

   (b) Alors $d^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{4} \left(f_k - \frac{1}{4}\right)^2 = \boxed{0,00375}$.

   (c) On constate que $d^2 < D_9$.
   $\boxed{\text{Au risque de 10\%, on peut considérer que le dé n'est pas pipé.}}$