BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2007

MATHÉMATIQUES

SÉRIE ES

Durée de l'épreuve : 3 heures **Coefficient : 5**

OBLIGATOIRE

Ce sujet comporte 6 pages dont **1 feuille ANNEXE.**

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée

Du papier millimétré est mis à la disposition du candidat.

Le candidat doit traiter les quatre exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

La feuille ANNEXE est à rendre avec la copie.

Note importante :

Dès que le sujet de l'épreuve vous est remis, assurez-vous qu'il est complet, en vérifiant le nombre de pages en votre possession.

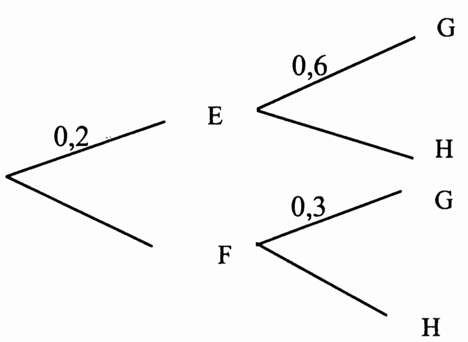
Si le sujet est incomplet, demandez immédiatement un nouvel exemplaire aux surveillants d'épreuve.

<u>EXERCICE 1</u> : Commun à tous les candidats (4 points)

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. L'exercice consiste à cocher la réponse exacte sans justification.
Une bonne réponse apporte 1 point, une mauvaise enlève 0,5 point.
L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.
Si le total des points de l'exercice est négatif, il est ramené à 0.

COMPLÉTER LE DOCUMENT RÉPONSE EN ANNEXE.

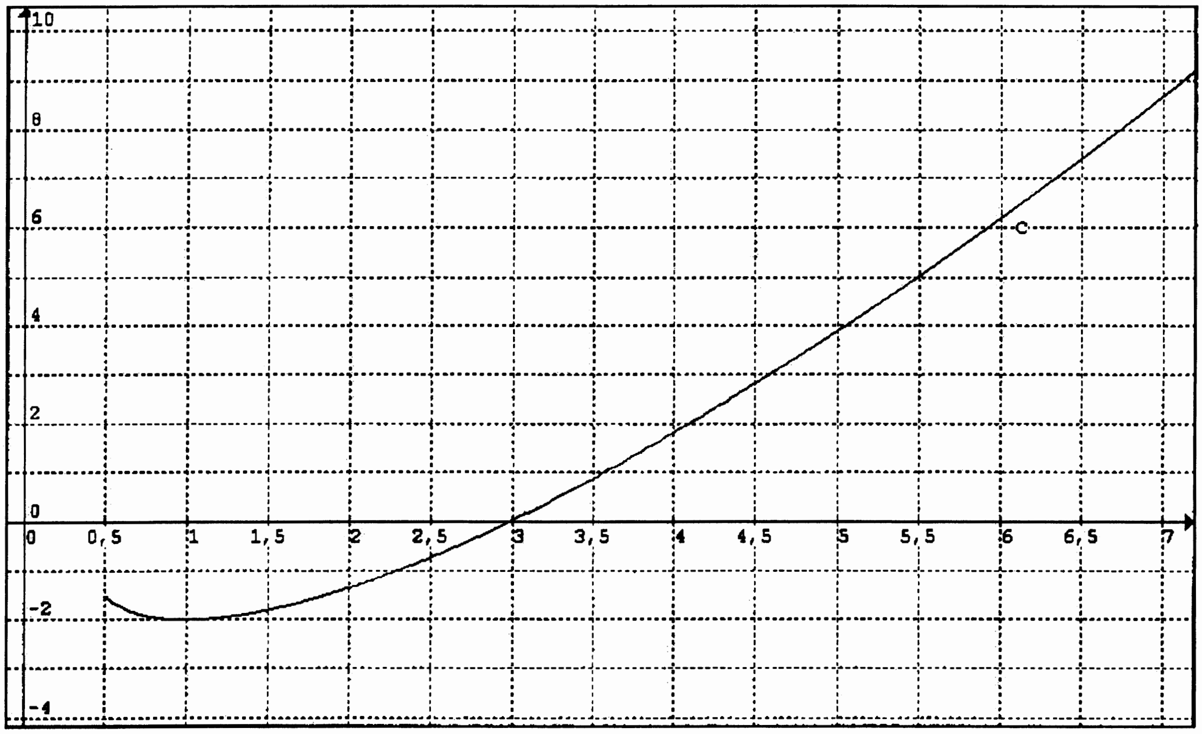
<u>Rappel</u> : La notation $p_A(B)$ désigne la probabilité de l'événement B sachant que l'événement A est réalisé.

Questions	
1. A et B sont deux événements indépendants tels que $p(A) = 0,7$ et $p(B) = 0,2$.	☐ $p(A \cap B) = 0,14$ ☐ $p(A \cup B) = 0,9$ ☐ $p_A(B) = 0,5$
2. Une pièce de monnaie est telle que la probabilité d'obtenir le côté face est égale à $\frac{1}{3}$. On lance 4 fois de suite cette pièce. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois le côté face ?	☐ $\frac{18}{81}$ ☐ $\frac{72}{81}$ ☐ $\frac{65}{81}$
3. On considère l'arbre pondéré ci-dessous. Quelle est la probabilité de $P_H(F)$?  	☐ $P_H(F) = 0,7$ ☐ $P_H(F) = 0,56$ ☐ $P_H(F) = 0,875$
4. Une urne contient 5 boules blanches et 5 boules noires. On tire, avec remise, une boule au hasard, n fois de suite (avec $n > 1$). Quelle est la probabilité d'obtenir des boules qui ne soient pas toutes de la même couleur ?	☐ $1 - \frac{1}{2^n}$ ☐ $1 - \frac{1}{2^{n-1}}$ ☐ $1 - \frac{1}{2^{2n}}$

<u>EXERCICE 2</u> : Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité (5 points)

La courbe (C) ci-dessous représente une fonction F définie et dérivable sur l'intervalle $J =]\frac{1}{2} ; +\infty[$.

On sait que (C) coupe l'axe des abscisses au point (3 ; 0) et a une tangente horizontale au point (1 ; – 2).
On note f la fonction dérivée de F.



1. a) A l'aide du graphique, donner les variations de F et en déduire le signe de f.

   b) Donner $f(1)$, $F(1)$ et $F(3)$. Préciser le signe de $f(3)$.

   c) Calculer $\int_1^3 f(x)dx$.

2. Trois fonctions f_1, f_2 et f_3 sont définies sur l'intervalle J par :

$$f_1(x) = (x^2 - x + 1)\,e^{2x-1} \qquad f_2(x) = \ln(2x - 1) \qquad \text{et } f_3(x) = -1 + \frac{1}{2x-1}$$

Une de ces trois fonctions est la fonction f.

   a) Etudier le signe de f_1 sur l'intervalle J.

   b) Résoudre l'équation $f_2(x) = 0$ sur l'intervalle J.

   c) Calculer $f_3(1)$.

   d) Calculer $\int_1^3 f_3(x)dx$.

   e) En déduire la fonction f.

EXERCICE 3 : **Commun à tous les candidats (5 points)**

Dans tout l'exercice, le détail des calculs statistiques n'est pas demandé.
Les résultats seront arrondis à 10^{-3}.
On rappelle que l'image d'un réel x par la fonction exponentielle peut être notée $\exp(x) = e^x$

On veut étudier l'évolution des records de l'épreuve d'athlétisme du 100 mètres masculin. Pour cela, on cherche un ajustement des records pour en prévoir l'évolution.
On donne dans le tableau suivant certains records, établis depuis 1900.

Année	1900	1912	1921	1930	1964	1983	1991	1999
Rang de l'année, x_i	0	12	21	30	64	83	91	99
Temps en secondes, y_i	10,80	10,60	10,40	10,30	10,06	9,93	9,86	9,79

1) Étude d'un modèle affine

a) Construire le nuage de points M_i (x_i ; y_i), avec i compris entre 1 et 8, associé à cette série statistique double. On prendra comme unité graphique 1 cm pour dix ans en abscisse et 1 cm pour un dixième de seconde en ordonnées.
On commencera les graduations au point de coordonnées (0 ; 9).

b) Peut-on envisager un ajustement affine à court terme ? Cet ajustement permet-il des prévisions pertinentes à long terme sur les records futurs?

2) Étude d'un modèle exponentiel

Après étude, on choisit de modéliser la situation par une autre courbe.
On effectue les changements de variables suivants :

$X = e^{-0{,}00924x}$ et $Y = \ln y$.

On obtient le tableau suivant :

$X_i = e^{-0{,}00924\,x_i}$	1	0,895	0,824	0,758	0,554	0,464	0,431	0,401
$Y_i = \ln y_i$	2,380	2,361	2,342	2,332	2,309	2,296	2,288	2,281

a) Donner une équation de la droite de régression de Y en X obtenue par la méthode des moindres carrés.

b) En déduire que l'on peut modéliser une expression de y en fonction de x sous la forme suivante : $y = \exp\left(a\,e^{-0{,}00924\,x} + b\right)$ où a et b sont deux réels à déterminer.

c) À l'aide de cet ajustement, quel record du 100 mètres peut-on prévoir en 2010 ?

d) Calculer la limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression suivante :

$$f(t) = \exp\left(0{,}154\,e^{-0{,}00924\,t} + 2{,}221\right)$$

e) Que peut-on en conclure, en utilisant ce modèle, quant aux records du cent mètres masculin, à très long terme ?

EXERCICE 4 : Commun à tous les candidats (6 points)

Les deux parties peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

PREMIÈRE PARTIE

On considère une fonction g définie sur l'intervalle $]-\frac{1}{2}\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = -x^2 + a\,x - \ln(2\,x + b), \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux réels.}$$

Calculer a et b pour que la courbe représentative de g dans un plan muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ passe par l'origine du repère et admette une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.

DEUXIÈME PARTIE

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-\frac{1}{2}\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = -x^2 + 2\,x - \ln(2\,x + 1).$$

On admet que f est dérivable et on note f' sa dérivée.

Le tableau de variation de la fonction f est le suivant :

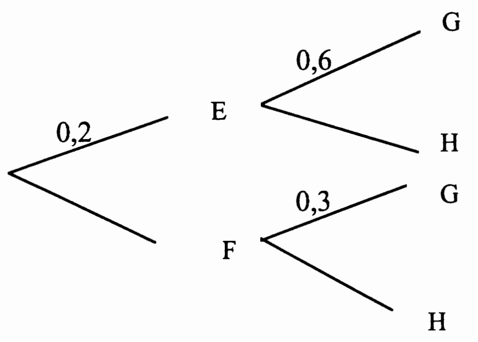
x	$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
signe de $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
variations de f	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$\frac{3}{4}+\ln(\frac{1}{2})$	↘	$-\infty$

1) Justifier tous les éléments contenus dans ce tableau.

2) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[\frac{1}{2}\,;1]$.

b) Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

3) Déterminer le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]-\frac{1}{2}\,;+\infty[$.

Questions	
1. A et B sont deux événements indépendants tels que $p(A) = 0,7$ et $p(B) = 0,2$.	☐ $p(A \cap B) = 0,14$
	☐ $p(A \cup B) = 0,9$
	☐ $p_A(B) = 0,5$
2. Une pièce de monnaie est telle que la probabilité d'obtenir le côté face est égale à $\frac{1}{3}$. On lance 4 fois de suite cette pièce. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois le côté face ?	☐ $\frac{18}{81}$
	☐ $\frac{72}{81}$
	☐ $\frac{65}{81}$
3. On considère l'arbre pondéré ci-dessous. Quelle est la probabilité de $P_H(F)$? 	☐ $P_H(F) = 0,7$
	☐ $P_H(F) = 0,56$
	☐ $P_H(F) = 0,875$
4. Une urne contient 5 boules blanches et 5 boules noires. On tire, avec remise, une boule au hasard, n fois de suite (avec $n > 1$). Quelle est la probabilité d'obtenir des boules qui ne soient pas toutes de la même couleur ?	☐ $1 - \frac{1}{2^n}$
	☐ $1 - \frac{1}{2^{n-1}}$
	☐ $1 - \frac{1}{2^{2n}}$