BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2007

MATHÉMATIQUES

SÉRIE ES

Durée de l'épreuve : 3 heures **Coefficient : 5**

OBLIGATOIRE

Ce sujet comporte 8 pages
dont 2 feuilles : **Annexe 1 (page 7 sur 8) et Annexe 2 (page 8 sur 8).**

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter les quatre exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les feuilles Annexe 1 et Annexe 2 sont à rendre avec la copie.

Note importante :

Dès que le sujet de l'épreuve vous est remis, assurez-vous qu'il est complet, en vérifiant le nombre de pages en votre possession.

Si le sujet est incomplet, demandez immédiatement un nouvel exemplaire aux surveillants d'épreuve.

EXERCICE 1 : **Commun à tous les candidats (5 points)**

Questionnaire à choix multiples.

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. L'exercice consiste à cocher la réponse exacte sans justification.

Une bonne réponse apporte 0,5 point, une mauvaise enlève 0,25 point.

L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.

Si le total des points de l'exercice est négatif, il est ramené à 0.

COMPLÉTER LE DOCUMENT RÉPONSE EN ANNEXE

Partie A

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^{-x^2+3})$ est égale à :	☐ $+\infty$
	☐ 0
	☐ e^3
2. $e^{\ln(2)} + e - 4$ est égale à :	☐ $e - 2$
	☐ $\ln(2) + e - 4$
	☐ -2
3. $\ln(1 - x) \geq 1$ est équivalente à :	☐ $x \leq 1 - e$
	☐ $x < 0$
	☐ $x > -e$
4. La fonction f définie sur $]0\,,+\infty[$ par $f(x) = \ln(x) + 2$ a pour primitive la fonction F définie sur $]0\,,+\infty[$ par :	☐ $F(x) = x\ln(x)$
	☐ $F(x) = x\ln(x) - x$
	☐ $F(x) = x\ln(x) + x$

Partie B

Soient a et b deux réels strictement positifs. A et B sont deux événements associés à une expérience aléatoire. On sait que $P(A) = a^2$, $P(B) = b^2$ et $P(A \cap B) = 2ab$. Alors,

5. $P(\overline{A})$ est égale à :	☐ $(1 - a)(1 + a)$
	☐ $a^2 - 1$
	☐ $b^2 - a^2$
6. $P(A \cup B)$ est égale à :	☐ $(a + b)^2$
	☐ $(a - b)^2$
	☐ $a^2 + b^2$
7. $P_B(A)$ est égale à :	☐ $\dfrac{a}{2b}$
	☐ $\dfrac{2b}{a}$
	☐ $\dfrac{2a}{b}$

Partie C

Soit $(U_n)_{n\geq 0}$ la suite géométrique de premier terme $U_0 = 2$ et de raison $\frac{1}{2}$. Alors,

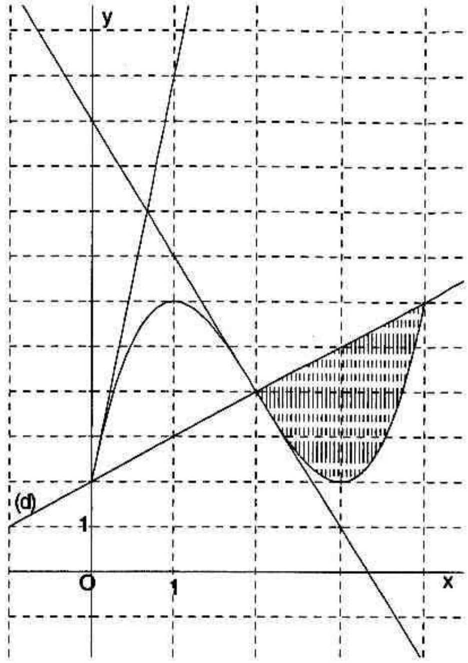
8. U_{n+1} est égale à :	☐ $U_n + \frac{1}{2}$
	☐ $\frac{1}{2} U_n$
	☐ $(U_n)^{1/2}$
9. U_n est égale à :	☐ $2 + \frac{1}{2} n$
	☐ $2^{(1-n)}$
	☐ $2^{(n+1)}$
10. $U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + U_4$ est égale à :	☐ $\frac{31}{8}$
	☐ 15
	☐ $\frac{15}{8}$

EXERCICE 2 : (5 points)

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère une fonction f définie et dérivable sur $I = [0 ; 4]$; sa courbe représentative est donnée ci-dessous dans un repère orthogonal. On note f' la fonction dérivée de f.

Sont également tracées les tangentes à la courbe aux points d'abscisse 0 et 2, ainsi que la droite (d) d'équation $y = x + 2$.
Aux points d'abscisses 1 et 3 les tangentes à la courbe sont parallèles à l'axe des abscisses.



1. Par lecture graphique, déterminer :

a. $f(0)$ et $f'(0)$.

b. $f(1)$ et $f'(1)$.

c. $f(2)$ et $f'(2)$.

d. l'ensemble des réels x tels que $f(x) \leq x + 2$.

2. a. Par lecture graphique, dresser le tableau de variation de f sur I ; on indiquera le signe de $f'(x)$.

b. En déduire le tableau de variation de la fonction g définie sur $[0 ; 4]$ par $g(x) = \ln(f(x))$.

3. On appelle A l'aire du domaine hachuré exprimée en unités d'aire.
Parmi les trois propositions suivantes, déterminer celle qui est exacte, en la justifiant par des arguments géométriques :

a) $0 \leq A \leq 1$ b) $1 \leq A \leq 6$ c) $6 \leq A \leq 8$.

4. On suppose que $f(x) = mx^3 + nx^2 + px + q$, où m, n, p et q sont des réels.

a. En utilisant les résultats de la question **1.** a., déterminer p et q.

b. En utilisant les résultats de la question **1.** b., déterminer m et n.

5. On admet que $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$.

a. Démontrer que les tangentes à la courbe aux points d'abscisses 0 et 4 sont parallèles.

b. Calculer, en unités d'aire, l'aire A du domaine hachuré.

EXERCICE 3 : **Commun à tous les candidats (3 points)**

On suppose que, pour tous les jours de septembre, la probabilité qu'il pleuve est $\frac{1}{4}$.

S'il pleut, la probabilité que Monsieur X arrive à l'heure à son travail est $\frac{1}{3}$.

S'il ne pleut pas, la probabilité que Monsieur X arrive à l'heure à son travail est $\frac{5}{6}$.

1. Représenter par un arbre de probabilité la situation ci-dessus.

2. Quelle est la probabilité qu'un jour de septembre donné, il pleuve et que Monsieur X arrive à l'heure à son travail ?

3. Montrer que la probabilité qu'un jour de septembre donné, Monsieur X arrive à l'heure à son travail est $\frac{17}{24}$.

4. Un jour de septembre donné, Monsieur X arrive à l'heure à son travail.
Quelle est la probabilité qu'il ait plu ce jour là ?

5. Sur une période de 4 jours de septembre, quelle est la probabilité que Monsieur X arrive à l'heure au moins une fois ? *On arrondira le résultat à 10^{-3} près.*

EXERCICE 4 : Commun à tous les candidats (7 points)

On s'intéresse à la production mensuelle d'une certaine catégories d'articles par une entreprise E. On sait que le nombre d'articles produits par mois est compris entre 0 et 500.
On suppose que le coût marginal, exprimé en milliers d'euros, peut être modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle [0 ; 5] par $C(x) = 4x + (1-2x)e^{-2x+3}$ où x représente le nombre de centaines d'articles fabriqués.

1. On sait que la fonction coût total, notée C_T, est la primitive de la fonction C sur [0 ; 5] qui s'annule pour $x = 0$.
Justifier que $C_T(x) = 2x^2 + xe^{-2x+3}$.

2. La fonction coût moyen, notée C_M est la fonction définie sur]0 ; 5] par :

$$C_M(x) = \frac{C_T(x)}{x}$$

Donner une expression de $C_M(x)$, en fonction de x.

3. a. Déterminer $C_M'(x)$ où C_M' désigne la fonction dérivée de C_M.

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $1 - e^{-2x+3} = 0$.

c. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $1 - e^{-2x+3} > 0$.

d. En déduire le sens de variation de C_M sur]0 ; 5].

4. Pour quelle production l'entreprise a-t-elle un coût moyen minimal et quel est ce coût en euros ?

5. Chaque centaine d'articles est vendue 7000 €. La recette totale pour x centaines d'articles est donnée, en admettant que toute la production soit vendue, par $R_T(x) = 7x$ en milliers d'euros.
Le bénéfice est donc défini par $B(x) = R_T(x) - C_T(x)$.

a. En **annexe 2** sont représentées les fonctions C_T et R_T.

Par lecture graphique déterminer :
- le coût moyen minimal,
- l'intervalle dans lequel doit se situer la production x pour qu'il y ait un bénéfice positif de l'entreprise E,
- la production x_0 pour laquelle le bénéfice est maximal.

On fera apparaître les constructions nécessaires.

b. Avec l'aide de votre calculatrice, affiner l'intervalle (à un article près) dans lequel doit se situer la production x pour qu'il y ait un bénéfice positif de l'entreprise E.

Annexe 1 **A rendre avec la copie**

EXERCICE 1 : commun à tous les candidats **Partie A**

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^{-x^2+3})$ est égale à :	☐ $+\infty$
	☐ 0
	☐ e^3
2. $e^{\ln(2)} + e - 4$ est égale à :	☐ $e - 2$
	☐ $\ln(2) + e - 4$
	☐ -2
3. $\ln(1 - x) \geq 1$ est équivalente à :	☐ $x \leq 1 - e$
	☐ $x < 0$
	☐ $x > -e$
4. La fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \ln(x) + 2$ a pour primitive la fonction F définie sur $]0, +\infty[$ par :	☐ $F(x) = x\ln(x)$
	☐ $F(x) = x\ln(x) - x$
	☐ $F(x) = x\ln(x) + x$

Partie B : Soient a et b deux réels strictement positifs. A et B sont deux événements associés à une expérience aléatoire. On sait que $P(A) = a^2$, $P(B) = b^2$ et $P(A \cap B) = 2ab$. Alors,

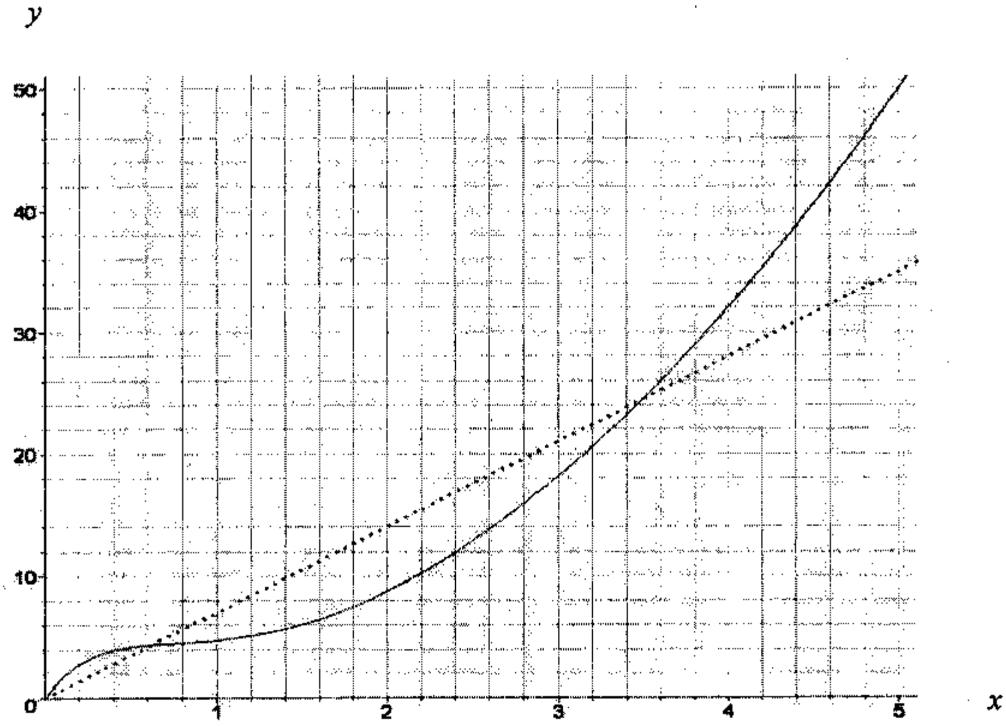
5. $P(\overline{A})$ est égale à :	☐ $(1 - a)(1 + a)$
	☐ $a^2 - 1$
	☐ $b^2 - a^2$
6. $P(A \cup B)$ est égale à :	☐ $(a + b)^2$
	☐ $(a - b)^2$
	☐ $a^2 + b^2$
7. $P_B(A)$ est égale à :	☐ $\dfrac{a}{2b}$
	☐ $\dfrac{2b}{a}$
	☐ $\dfrac{2a}{b}$

Partie C : Soit $(U_n)_{n \geq 0}$ la suite géométrique de premier terme $U_0 = 2$ et de raison $\dfrac{1}{2}$. Alors,

8. U_{n+1} est égale à :	☐ $U_n + \dfrac{1}{2}$
	☐ $\dfrac{1}{2} U_n$
	☐ $(U_n)^{1/2}$
9. U_n est égale à :	☐ $2 + \dfrac{1}{2}n$
	☐ $2^{(1-n)}$
	☐ $2^{(n+1)}$
10. $U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + U_4$ est égale à :	☐ $\dfrac{31}{8}$
	☐ 15
	☐ $\dfrac{15}{8}$

<u>**Annexe 2**</u> <u>**A rendre avec la copie**</u>

EXERCICE 4 : Commun à tous les candidats



——————— Courbe représentative de C_T

++++++++++ Courbe représentative de R_T