BACCALAUREAT GENERAL

SESSION 2007

MATHÉMATIQUES

<u>SERIE : ES</u>

DUREE DE L'EPREUVE : 3 heures - COEFFICIENT : 7

Ce sujet comporte 5 pages

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

L'usage des formulaires de mathématiques n'est pas autorisé.

Le candidat doit traiter les quatre exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Tournez la page S.V.P

EXERCICE 1 (4 points)

Commun à tous les candidats

QCM

Pour chacune des questions, une seule des réponses A, B ou C est exacte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

NOTATION *: une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fausse enlève 0,25 point, l'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total des points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est 0.*

On considère une fonction f définie et dérivable sur **R**, de dérivée f'. Son tableau de variations est donné ci-dessous. On nomme (C) la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

1) On peut affirmer que :

Réponse A : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Réponse B : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

Réponse C : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$.

2) La courbe (C) admet :

Réponse A : la droite d'équation $x = 0$ pour asymptote.
Réponse B : la droite d'équation $x = 2$ pour asymptote.
Réponse C : la droite d'équation $y = 0$ pour asymptote.

3) Dans **R** l'équation $f(x) = 0$ admet :

Réponse A : une unique solution.
Réponse B : deux solutions distinctes.
Réponse C : trois solutions distinctes.

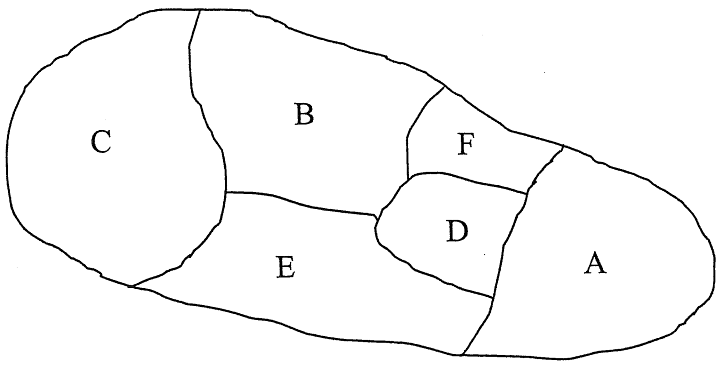
4) Dans **R** l'inéquation $f(x) > 3$

Réponse A : n'a pas de solution.
Réponse B : a toutes ses solutions positives.
Réponse C : a toutes ses solutions négatives.

EXERCICE 2 (5 points)

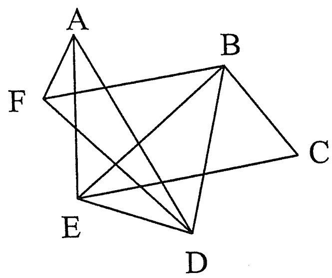
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Une île imaginaire dont la carte est représentée ci-dessous, est composée de six provinces, notées A, B, C, D, E et F.



On s'intéresse aux frontières séparant ces provinces. On traduit cette situation par un graphe dont les sommets sont les provinces et où chaque arête représente une frontière entre deux provinces.

On admet que le graphe $\mathcal{G}$ ci-dessous représente cette situation :



1) **a.** Donner l'ordre du graphe $\mathcal{G}$, puis le degré de chacun de ses sommets

b. Peut-on visiter cette île en franchissant une et une seule fois chacune des dix frontières ? Justifier. Si oui, proposer un parcours possible.

2) **a.** Le graphe $\mathcal{G}$ possède-t-il un sous-graphe complet d'ordre 3 ? Si oui, en citer un.

Préciser, sans justification, si le graphe $\mathcal{G}$ possède un sous graphe complet d'ordre 4.

Quelle conséquence cela a-t-il sur le nombre chromatique c du graphe $\mathcal{G}$?

b. Proposer une coloration de la carte (ou du graphe) avec le minimum de couleurs afin que deux provinces qui ont une frontière commune aient des couleurs différentes (on peut remplacer les couleurs par différents hachurages).

EXERCICE 3 (4 points)

Commun à tous les candidats

PARTIE A :

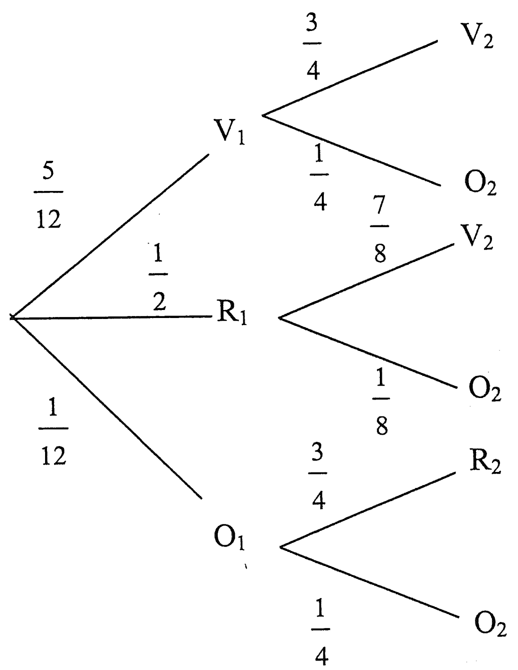
Sur son trajet habituel pour aller travailler, un automobiliste rencontre deux feux tricolores successifs dont les fonctionnements sont supposés indépendants.
Ces feux sont réglés de telle sorte que la probabilité pour un automobiliste de rencontrer le feu au vert est $\frac{5}{12}$, à l'orange $\frac{1}{12}$ et au rouge $\frac{1}{2}$.

On note R_1 l'événement : le premier feu rencontré est au rouge
V_1 l'événement : le premier feu rencontré est au vert
O_1 l'événement : le premier feu rencontré est à l'orange
et on définit de même R_2, V_2, O_2 pour le deuxième feu rencontré.

1) Quelle est la probabilité que l'automobiliste rencontre les deux feux au vert ?
2) Calculer la probabilité pour qu'au moins l'un des deux feux rencontrés ne soit pas au vert.

PARTIE B :

On règle le deuxième feu afin de rendre la circulation des véhicules plus fluide.
L'arbre suivant modélise la nouvelle situation dans laquelle les fonctionnements des deux feux ne sont plus indépendants.



1) Quelle est la probabilité que l'automobiliste rencontre les deux feux au vert ?
2) Quelle est la probabilité que le deuxième feu rencontré par l'automobiliste soit au vert ?

EXERCICE 4 (7 points)

Commun à tous les candidats

Une entreprise produit et vend un modèle de pièces pour hélicoptères. Pour des raisons techniques et de stockage, sa production mensuelle est comprise entre 100 et 600 pièces. Elle vend tout ce qui est produit.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;6]$ par $f(x) = -x^2 + 10x - 9 - 8\ln(x)$.

$f(x)$ représente le bénéfice mensuel, exprimé en dizaines de milliers d'euros, obtenu pour la vente de x centaines de pièces.

La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[1\,;6]$. On note f' sa fonction dérivée.

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1) **a.** Montrer que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[1\,;\,6]$ $f'(x) = \dfrac{-2(x-1)(x-4)}{x}$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[1\,;\,6]$.

c. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;\,6]$.

d. Quelle est la quantité de pièces à produire pour obtenir un bénéfice mensuel maximal ?
Calculer ce bénéfice arrondi à l'euro près.

2) **a.** Prouver que la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = x\ln(x) - x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

b. En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;6]$.

c. Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;6]$ (donner la valeur décimale arrondie au dixième).

<u>**Rappel**</u> : Soit f une fonction et $[a\,;\,b]$ un intervalle sur lequel f est définie et dérivable.

La valeur moyenne m de f sur un l'intervalle $[a\,;b]$, est le nombre m tel que :

$$m = \frac{1}{b-a} \times \int_a^b f(x)dx.$$