

# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2007

MATHÉMATIQUES

SÉRIE ES

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient : 7

**SPECIALITE**

Ce sujet comporte 8 pages  
dont 2 feuilles : Annexe 1 (page 7 sur 8) et Annexe 2 (page 8 sur 8).

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter les quatre exercices.  
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les feuilles Annexe 1 et Annexe 2 sont à rendre avec la copie.

**Note importante :**

Dès que le sujet de l'épreuve vous est remis, assurez-vous qu'il est complet, en vérifiant le nombre de pages en votre possession.

Si le sujet est incomplet, demandez immédiatement un nouvel exemplaire aux surveillants d'épreuve.

**EXERCICE 1 : Commun à tous les candidats (5 points)****Questionnaire à choix multiples.**

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. L'exercice consiste à cocher la réponse exacte sans justification.

Une bonne réponse apporte 0,5 point, une mauvaise enlève 0,25 point.

L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.

Si le total des points de l'exercice est négatif, il est ramené à 0.

**COMPLÉTER LE DOCUMENT RÉPONSE EN ANNEXE****Partie A**

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x^2+3})$ est égale à :	<input type="checkbox"/> $+\infty$
	<input type="checkbox"/> 0
	<input type="checkbox"/> $e^3$
2. $e^{\ln(2)} + e - 4$ est égale à :	<input type="checkbox"/> $e - 2$
	<input type="checkbox"/> $\ln(2) + e - 4$
	<input type="checkbox"/> $-2$
3. $\ln(1-x) \geq 1$ est équivalente à :	<input type="checkbox"/> $x \leq 1 - e$
	<input type="checkbox"/> $x < 0$
	<input type="checkbox"/> $x > -e$
4. La fonction $f$ définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \ln(x) + 2$ a pour primitive la fonction $F$ définie sur $]0, +\infty[$ par :	<input type="checkbox"/> $F(x) = x \ln(x)$
	<input type="checkbox"/> $F(x) = x \ln(x) - x$
	<input type="checkbox"/> $F(x) = x \ln(x) + x$

**Partie B**

Soient  $a$  et  $b$  deux réels strictement positifs.  $A$  et  $B$  sont deux événements associés à une expérience aléatoire. On sait que  $P(A) = a^2$ ,  $P(B) = b^2$  et  $P(A \cap B) = 2ab$ . Alors,

5. $P(\bar{A})$ est égale à :	<input type="checkbox"/> $(1-a)(1+a)$
	<input type="checkbox"/> $a^2 - 1$
	<input type="checkbox"/> $b^2 - a^2$
6. $P(A \cup B)$ est égale à :	<input type="checkbox"/> $(a+b)^2$
	<input type="checkbox"/> $(a-b)^2$
	<input type="checkbox"/> $a^2 + b^2$
7. $P_B(A)$ est égale à :	<input type="checkbox"/> $\frac{a}{2b}$
	<input type="checkbox"/> $\frac{2b}{a}$
	<input type="checkbox"/> $\frac{2a}{b}$

### Partie C

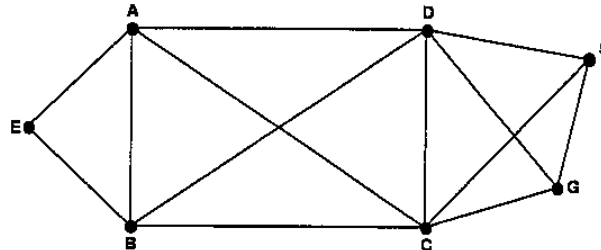
Soit  $(U_n)_{n \geq 0}$  la suite géométrique de premier terme  $U_0 = 2$  et de raison  $\frac{1}{2}$ . Alors,

8. $U_{n+1}$ est égale à :	<input type="checkbox"/> $U_n + \frac{1}{2}$
	<input type="checkbox"/> $\frac{1}{2} U_n$
	<input type="checkbox"/> $(U_n)^{1/2}$
9. $U_n$ est égale à :	<input type="checkbox"/> $2 + \frac{1}{2}n$
	<input type="checkbox"/> $2^{(1-n)}$
	<input type="checkbox"/> $2^{(n+1)}$
10. $U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + U_4$ est égale à :	<input type="checkbox"/> $\frac{31}{8}$
	<input type="checkbox"/> 15
	<input type="checkbox"/> $\frac{15}{8}$

**EXERCICE 2 : Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité (sur 5 points)**

*Les parties A et B sont indépendantes*

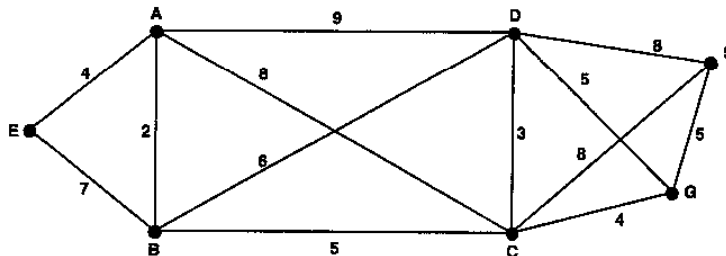
L'objet d'étude est le réseau des égouts d'une ville. Ce réseau est modélisé par le graphe ci-dessous : les sommets représentent les stations et les arêtes, les canalisations.



**Partie A**

1. Ce graphe admet-il une chaîne eulérienne ?
2. Justifier que le nombre chromatique de ce graphe est compris entre 4 et 6.

**Partie B**



Le graphe pondéré ci-dessus donne, en minutes, les durées des trajets existant entre les différentes stations du réseau des égouts.

1. Un ouvrier doit se rendre par ce réseau de la station E à la station S. Déterminer, en utilisant un algorithme, le trajet le plus rapide pour aller de E à S et préciser sa durée.
2. Ayant choisi le trajet le plus rapide, l'ouvrier arrivant en C, apprend que les canalisations CG et CS sont fermées pour cause de travaux et qu'il ne peut les utiliser.
  - a. Comment peut-il terminer, au plus vite, son trajet jusqu'à S ? Combien de temps le trajet entre E et S prendra-t-il dans ce cas ?
  - b. S'il avait su dès le départ que les canalisations CG et CS étaient impraticables, quel trajet aurait choisi l'ouvrier pour se rendre, au plus vite de E à S ? Combien de temps ce trajet aurait-il pris ?

**EXERCICE 3 : Commun à tous les candidats (3 points)**

On suppose que, pour tous les jours de septembre, la probabilité qu'il pleuve est  $\frac{1}{4}$ .

S'il pleut, la probabilité que Monsieur X arrive à l'heure à son travail est  $\frac{1}{3}$ .

S'il ne pleut pas, la probabilité que Monsieur X arrive à l'heure à son travail est  $\frac{5}{6}$ .

1. Représenter par un arbre de probabilité la situation ci-dessus.
2. Quelle est la probabilité qu'un jour de septembre donné, il pleuve et que Monsieur X arrive à l'heure à son travail ?
3. Montrer que la probabilité qu'un jour de septembre donné, Monsieur X arrive à l'heure à son travail est  $\frac{17}{24}$ .
4. Un jour de septembre donné, Monsieur X arrive à l'heure à son travail.  
Quelle est la probabilité qu'il ait plu ce jour là ?
5. Sur une période de 4 jours de septembre, quelle est la probabilité que Monsieur X arrive à l'heure au moins une fois ? *On arrondira le résultat à  $10^{-3}$  près.*

#### **EXERCICE 4 : Commun à tous les candidats (7 points)**

On s'intéresse à la production mensuelle d'une certaine catégories d'articles par une entreprise E. On sait que le nombre d'articles produits par mois est compris entre 0 et 500.

On suppose que le coût marginal, exprimé en milliers d'euros, peut être modélisé par la fonction  $C$  définie sur l'intervalle  $[0 ; 5]$  par  $C(x) = 4x + (1 - 2x)e^{-2x+3}$  où  $x$  représente le nombre de centaines d'articles fabriqués.

1. On sait que la fonction coût total, notée  $C_T$ , est la primitive de la fonction  $C$  sur  $[0 ; 5]$  qui s'annule pour  $x = 0$ .

Justifier que  $C_T(x) = 2x^2 + xe^{-2x+3}$ .

2. La fonction coût moyen, notée  $C_M$  est la fonction définie sur  $]0 ; 5]$  par :

$$C_M(x) = \frac{C_T(x)}{x}$$

Donner une expression de  $C_M(x)$ , en fonction de  $x$ .

3. a. Déterminer  $C_M'(x)$  où  $C_M'$  désigne la fonction dérivée de  $C_M$ .

b. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $1 - e^{-2x+3} = 0$ .

c. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation :  $1 - e^{-2x+3} > 0$ .

- d. En déduire le sens de variation de  $C_M$  sur  $]0 ; 5]$ .

4. Pour quelle production l'entreprise a-t-elle un coût moyen minimal et quel est ce coût en euros ?

5. Chaque centaine d'articles est vendue 7000 €. La recette totale pour  $x$  centaines d'articles est donnée, en admettant que toute la production soit vendue, par  $R_T(x) = 7x$  en milliers d'euros.

Le bénéfice est donc défini par  $B(x) = R_T(x) - C_T(x)$ .

- a. En **annexe 2** sont représentées les fonctions  $C_T$  et  $R_T$ .

Par lecture graphique déterminer :

- le coût moyen minimal,
- l'intervalle dans lequel doit se situer la production  $x$  pour qu'il y ait un bénéfice positif de l'entreprise E,
- la production  $x_0$  pour laquelle le bénéfice est maximal.

*On fera apparaître les constructions nécessaires.*

- b. Avec l'aide de votre calculatrice, affiner l'intervalle (à un article près) dans lequel doit se situer la production  $x$  pour qu'il y ait un bénéfice positif de l'entreprise E.

**Annexe 1****A rendre avec la copie****EXERCICE 1 : commun à tous les candidats Partie A**

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x^2+3})$ est égale à :	<input type="checkbox"/> $+\infty$
	<input type="checkbox"/> 0
	<input type="checkbox"/> $e^3$
2. $e^{\ln(2)} + e - 4$ est égale à :	<input type="checkbox"/> $e - 2$
	<input type="checkbox"/> $\ln(2) + e - 4$
	<input type="checkbox"/> $-2$
3. $\ln(1-x) \geq 1$ est équivalente à :	<input type="checkbox"/> $x \leq 1 - e$
	<input type="checkbox"/> $x < 0$
	<input type="checkbox"/> $x > -e$
4. La fonction $f$ définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \ln(x) + 2$ a pour primitive la fonction $F$ définie sur $]0, +\infty[$ par :	<input type="checkbox"/> $F(x) = x \ln(x)$
	<input type="checkbox"/> $F(x) = x \ln(x) - x$
	<input type="checkbox"/> $F(x) = x \ln(x) + x$

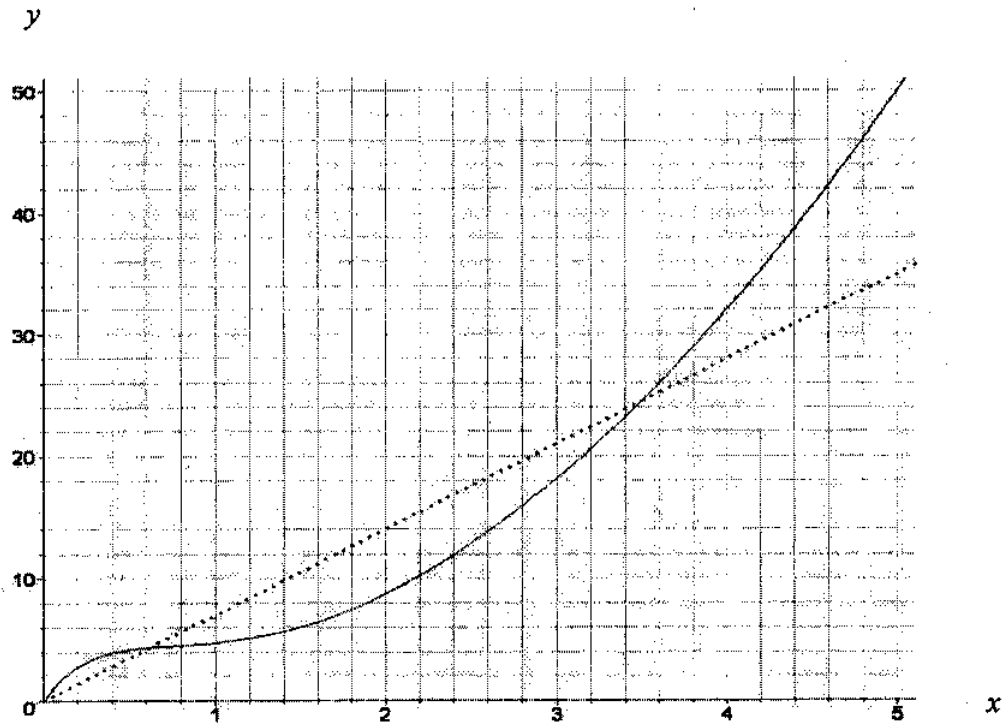
**Partie B :** Soient  $a$  et  $b$  deux réels strictement positifs.  $A$  et  $B$  sont deux événements associés à une expérience aléatoire. On sait que  $P(A) = a^2$ ,  $P(B) = b^2$  et  $P(A \cap B) = 2ab$ . Alors,

5. $P(\bar{A})$ est égale à :	<input type="checkbox"/> $(1-a)(1+a)$
	<input type="checkbox"/> $a^2 - 1$
	<input type="checkbox"/> $b^2 - a^2$
6. $P(A \cup B)$ est égale à :	<input type="checkbox"/> $(a+b)^2$
	<input type="checkbox"/> $(a-b)^2$
	<input type="checkbox"/> $a^2 + b^2$
7. $P_B(A)$ est égale à :	<input type="checkbox"/> $\frac{a}{2b}$
	<input type="checkbox"/> $\frac{2b}{a}$
	<input type="checkbox"/> $\frac{2a}{b}$

**Partie C :** Soit  $(U_n)_{n \geq 0}$  la suite géométrique de premier terme  $U_0 = 2$  et de raison  $\frac{1}{2}$ . Alors,

8. $U_{n+1}$ est égale à :	<input type="checkbox"/> $U_n + \frac{1}{2}$
	<input type="checkbox"/> $\frac{1}{2} U_n$
	<input type="checkbox"/> $(U_n)^{1/2}$
9. $U_n$ est égale à :	<input type="checkbox"/> $2 + \frac{1}{2}n$
	<input type="checkbox"/> $2^{(1-n)}$
	<input type="checkbox"/> $2^{(n+1)}$
10. $U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + U_4$ est égale à :	<input type="checkbox"/> $\frac{31}{8}$
	<input type="checkbox"/> 15
	<input type="checkbox"/> $\frac{15}{8}$

**EXERCICE 4 : Commun à tous les candidats**



————— Courbe représentative de  $C_T$   
+++++ Courbe représentative de  $R_T$