BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

session 2007

MATHÉMATIQUES

série : **ES**

Spécialité

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 3 heures – COEFFICIENT : 7

Ce sujet comporte 7 pages dont 2 annexes qui sont à rendre avec la copie.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

L'usage des formulaires de mathématiques n'est pas autorisé.

Le candidat doit traiter les quatre exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 *(5 points)*

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[-5;2]$ et (C) sa courbe représentative relativement à un repère orthogonal.

Partie A : Un logiciel fournit le graphique qui figure en annexe page 6.
En utilisant ce graphique, répondre aux questions suivantes. Expliquer les procédés utilisés et, lorsque c'est nécessaire, compléter le graphique.

1. Donner une estimation de $f'(0)$ où f' est la fonction dérivée de la fonction f.

2. a) Donner un encadrement d'amplitude 1 de $\int_0^2 f(x)dx$.

   b) Donner une valeur approchée à 0,5 près de la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0;2]$.

Partie B : Dans cette partie on sait que la fonction f est définie par :
pour tout élément x de $[-5;2]$, $f(x)=(2-x)e^x$.

1. a) On nomme f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$ pour x élément de $[-5;2]$.

   b) Justifier l'affirmation : « Sur l'intervalle $[-5;2]$, la fonction f admet un maximum pour $x=1$ et ce maximum est égal à e ».

2. Donner une équation de la droite (T) tangente à la courbe (C) en son point d'abscisse 0.

3. Soit g la fonction définie par : pour x élément de $[-5;2]$, $g(x)=(3-x)e^x$.
   a) Calculer $g'(x)$ où g' est la fonction dérivée de la fonction g.

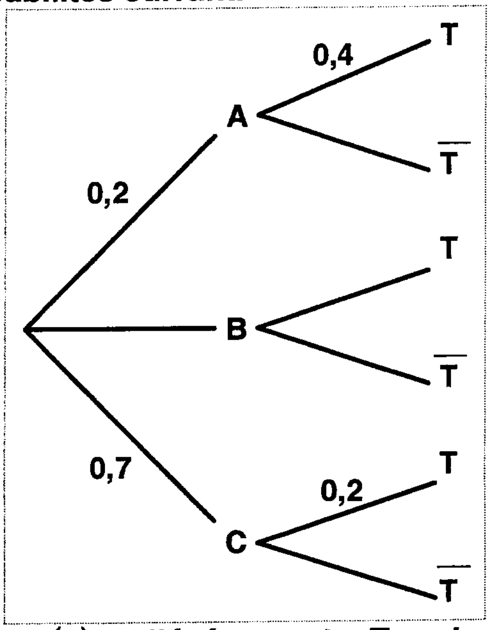
   b) Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0;2]$ (en donner la valeur exacte).

Exercice 2 *(5 points)*

Les deux parties sont totalement indépendantes.

Partie A

Soient A, B, C et T quatre événements associés à une épreuve aléatoire.
On note $\overline{T}$ l'événement contraire de l'événement T.
On donne l'arbre de probabilités suivant.

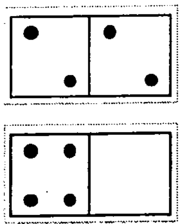


1. Donner la probabilité $p_A(T)$ de l'événement « T sachant que A est réalisé ».
2. Calculer :
   a) la probabilité $p(B)$ de l'événement B ;
   b) la probabilité $p_A(\overline{T})$ de l'événement « non T sachant que A est réalisé » ;
   c) la probabilité $p(A \cap T)$ de l'événement « A et T ».
3. On sait que la probabilité $p(T)$ de l'événement T est : $p(T) = 0{,}3$.
   a) Calculer la probabilité $p_T(A)$.
   b) Calculer la probabilité $p_B(T)$.

Partie B

Un domino est une petite plaque partagée en deux parties.
Sur chacune des parties figure une série de points.
Il peut y avoir de zéro à six points dans une série.

Un jeu de dominos comporte 28 dominos, tous différents.



Lors d'une fête, on propose le jeu suivant :
- le joueur tire au hasard un domino parmi les 28 dominos du jeu,
- il gagne, en euros, la somme des points figurant sur le domino tiré.

On suppose que tous les dominos du jeu ont la même probabilité d'être tirés.

1. Etablir la loi de probabilité des gains possibles.
2. Le joueur doit miser 7€ avant de tirer un domino. En se fondant sur le calcul des probabilités, peut-il espérer récupérer ses mises à l'issue d'un grand nombre de parties ?

Exercice 3 *(5 points)*

(candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

Pour chacune des cinq questions suivantes numérotées de 1 à 5, une et une seule des trois propositions (a), (b), (c) est exacte.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la proposition exacte. Aucune justification n'est attendue.

Pour chaque question, une réponse correcte rapporte 1 point, une réponse incorrecte enlève 0,25 point, une absence de réponse ne rapporte et n'enlève aucun point. Si le total est négatif, la note pour cet exercice est ramenée à 0.

1. La suite (u_n) est définie par : pour tout entier naturel n, $u_n = 1 - \dfrac{6}{n - 10{,}5}$

   (a) : La suite (u_n) est croissante.
   (b) : La suite (u_n) est décroissante.
   (c) : La suite (u_n) n'est pas monotone.

2. La suite (u_n) est définie par :
   $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = -0{,}1 u_n$

   (a) : La suite (u_n) est arithmétique.
   (b) : La suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.
   (c) : La suite (u_n) est géométrique.

3. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère :
   - le plan (P) d'équation $x + y + z - 2 = 0$,
   - la droite (D) d'équations cartésiennes $y = 1$ et $z = 1 - x$.

   (a) : La droite (D) est sécante au plan (P).
   (b) : La droite (D) est incluse dans le plan (P).
   (c) : La droite (D) est strictement parallèle au plan (P).

4. La matrice d'un graphe non orienté G, de sommets A, B, C, D, E est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) : Le graphe G comporte 12 arêtes.
   (b) : Le graphe G admet une chaîne eulérienne.
   (c) : Le graphe G est complet.

5. Les ventes d'un nouveau roman ont régulièrement progressé de 2% chaque semaine depuis sa parution. Au cours de la première semaine il s'en était vendu dix mille exemplaires.
   Le nombre d'exemplaires vendus au cours des 45 semaines écoulées depuis sa parution est :

   (a) : 23 900. (b) : 718 927. (c) : 743 306.

Exercice 4 *(5 points)*

Partie A

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[1;50]$ par :

$$f(x) = x^2 + 72\ln(10x+1) \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{f(x)}{x}.$$

1. Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[1;50]$.

2. La fonction h est définie sur l'intervalle $[1;50]$ par :

$$h(x) = x^2 + \frac{720x}{10x+1} - 72\ln(10x+1).$$

   a) On admet que la dérivée de la fonction h est la fonction h' définie par :
   pour tout x élément de l'intervalle $[1;50]$, $h'(x) = \dfrac{2x(10x-59)(10x+61)}{(10x+1)^2}$.
   Résoudre l'équation $h'(x) = 0$ sur l'intervalle $[1;50]$.
   Etudier le signe de $h'(x)$ sur l'intervalle $[1;50]$.

   b) Dresser le tableau des variations de la fonction h.

   c) On admet que, dans l'intervalle $[1;50]$, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α. A l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée à 10^{-2} près de α.

   d) Expliquer pourquoi
   - pour tout x élément de l'intervalle $[1;\alpha]$, $h(x) \leq 0$,
   - pour tout x élément de l'intervalle $[\alpha;50]$, $h(x) \geq 0$.

3. a) Démontrer que pour tout x élément de l'intervalle $[1;50]$, $g'(x) = \dfrac{h(x)}{x^2}$.

   b) Démontrer que la fonction g admet un minimum pour $x = \alpha$.

   c) En utilisant le fait que $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, exprimer $g'(x)$ en fonction de $f'(x)$ puis déduire de la question précédente que $g(\alpha) = f'(\alpha)$.

Partie B : application

Une entreprise a conduit une étude statistique sur les coûts de production de l'un de ses produits. Pour une production comprise entre 1 tonne et 50 tonnes et des coûts exprimés en milliers d'euros, cette étude conduit à adopter le modèle mathématique suivant :

- le coût total de production C_T est donné par $C_T = f(x)$, où x est la quantité produite exprimée en tonnes,
- pour une production de x tonnes, le coût moyen C_M de production d'une tonne est donné par $C_M = g(x)$ et le coût marginal C de production est donné par $C = f'(x)$.

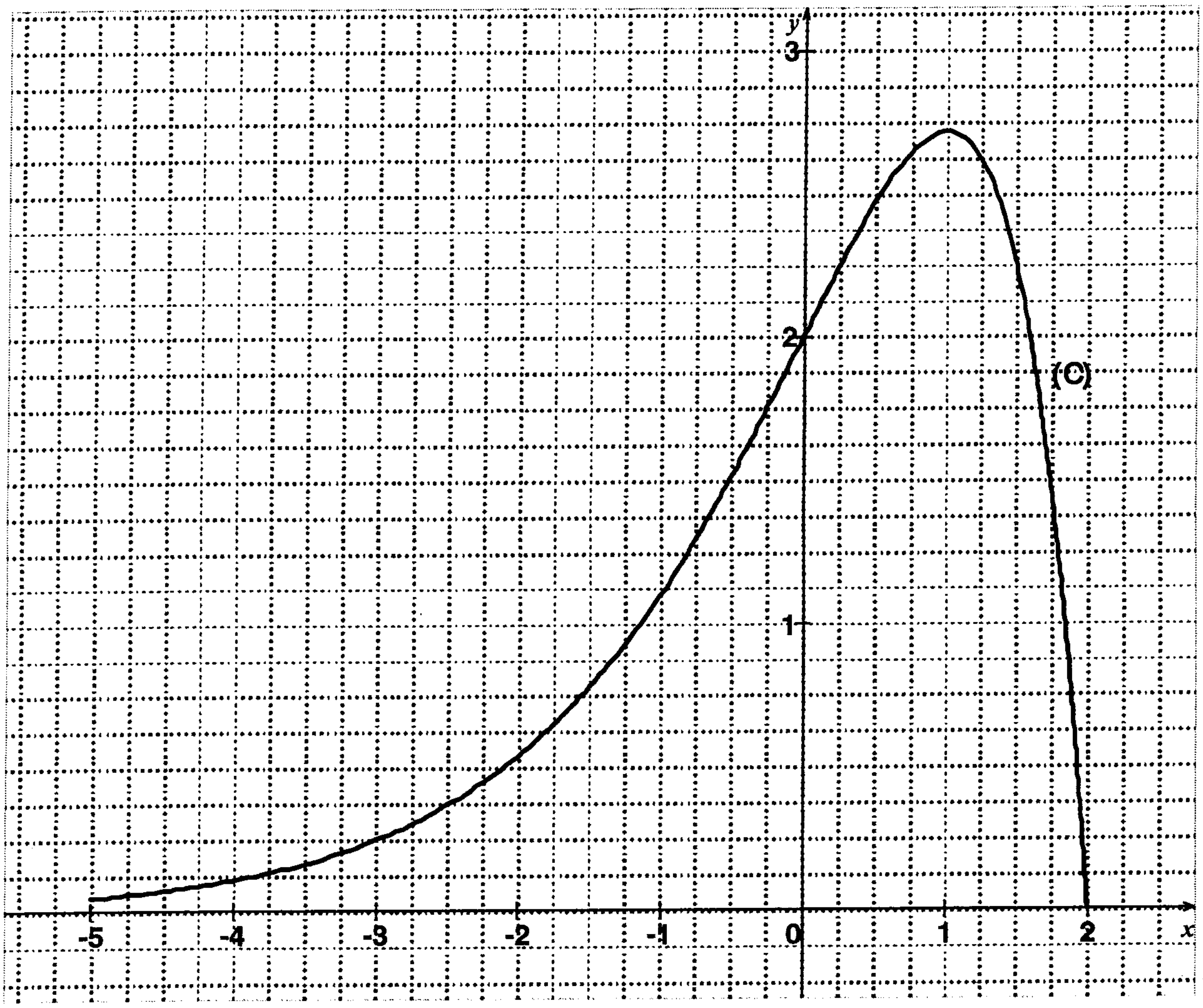
(Des graphiques obtenus à l'aide d'un logiciel sont fournis en annexe 2 page 7. Ils peuvent être complétés et rendus avec la copie.)

1. Expliquer pourquoi, quelle que soit la quantité produite, l'entreprise ne peut espérer faire un bénéfice si elle vend sa production moins de 38 000 € la tonne.

2. Quelle que soit sa production, l'entreprise pense pouvoir la vendre en totalité au prix de 45 000 euros la tonne. Donner une estimation des productions qui pourront permettre de réaliser un bénéfice.

Annexe 1

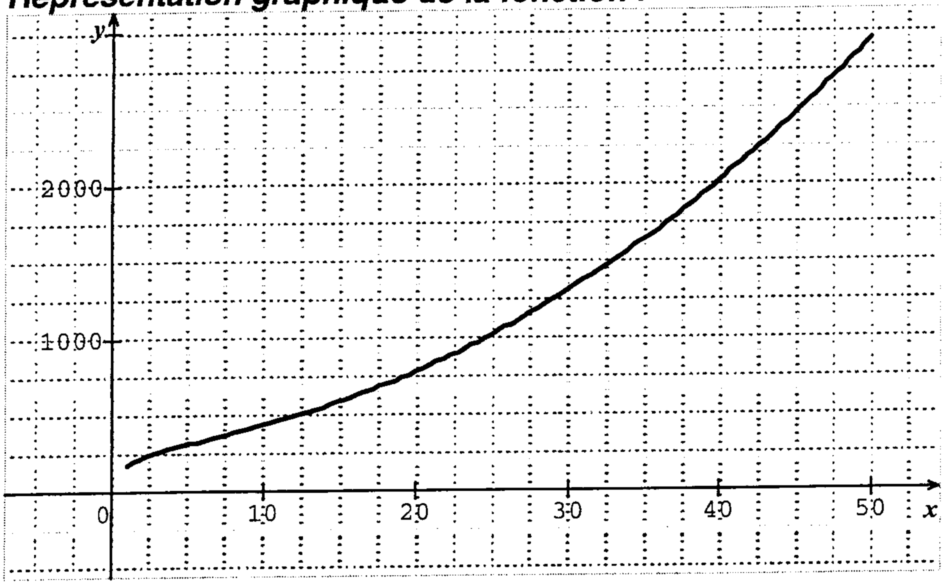
à utiliser pour l'exercice 1 et à rendre avec la copie.



Annexe 2 : à utiliser pour l'exercice 4 partie B

et à rendre avec la copie

Représentation graphique de la fonction f



Représentations graphiques des fonctions g et f '