BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2007

MATHÉMATIQUES

Série : **ES**

spécialité

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 3 heures – COEFFICIENT : 7

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7
dont deux pages annexes à rendre avec la copie.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter tous les exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

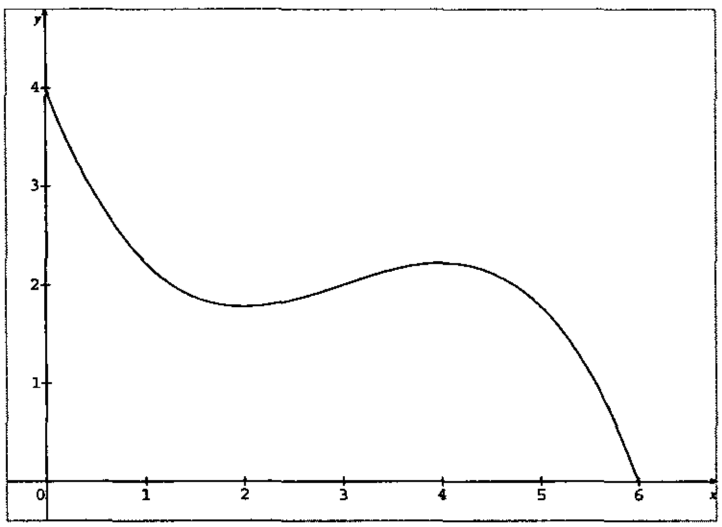
Tournez la page S.V.P.

Exercice 1 *(3 points)*

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des trois questions, trois réponses sont proposées ; une seule de ces réponses convient.
Indiquer sur votre copie le numéro de la question et recopier la réponse que vous jugez convenir, sans justifier votre choix.
Barème : Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse inexacte ou une question sans réponse ne rapporte et n'enlève aucun point.

1) Voici la courbe représentative d'une fonction f sur l'intervalle $[0\,;6[$.



Sur l'intervalle $[0\,;\,6[$, la fonction composée $x \mapsto \ln[f(x)]$:

- est strictement croissante.
- a les mêmes variations que f.
- a les variations contraires de celles de f.

2) Soit g la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = 4x - 2\ln x$.
Dans un repère, une équation de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse 1 est :

- $y = 2x + 2$.
- $y = 4x - 2$.
- $y = 2x + 6$.

3) L'ensemble des solutions de l'équation $2\ln x = \ln(2x+3)$ est :

- l'ensemble vide.
- $\{-1;3\}$.
- $\{3\}$.

Exercice 2 *(5 points)*

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Une entreprise fabrique des savons et des bougies parfumées en quantités respectives x et y exprimées en tonnes.
Le coût total de production z, exprimé en milliers d'euros, est donné par la relation $z = 2x^2 - 8x + y^2 - 6y + 18$ avec $x \in [0 ; 6]$ et $y \in [0 ; 8]$.

1. La surface S représentant le coût en fonction de x et de y dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est donnée sur la feuille annexe 1, figure 1.

   L'annexe 1 sera rendue complétée avec la copie.

   a) Le point A(3 ; 2 ; 3) appartient-il à la surface S ? Justifier.
   b) Placer, sur la figure 1, le point B d'abscisse 5 et d'ordonnée 2 qui appartient à S.
   c) Soit $y = 2$. Exprimer alors z sous la forme $z = f(x)$ puis donner la nature de la section de la surface S par le plan d'équation $y = 2$ en justifiant.

2. La fabrication de x tonnes de savons et de y tonnes de bougies parfumées engendre la contrainte : $x + y = 5$.

   a) Quelle est la nature de l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées vérifient $x + y = 5$?
   b) Vérifier que, sous la contrainte $x + y = 5$, z peut s'écrire sous la forme $z = g(x)$ avec $g(x) = 3x^2 - 12x + 13$.
   c) Déterminer la valeur de x pour laquelle g admet un minimum puis la valeur de y et le coût de production z qui correspondent.
   On note C le point de la surface S qui correspond à ce coût minimum
   d) On donne sur la feuille annexe 1, figure 2, la projection orthogonale de la surface S sur le plan (xOy) (« vue de dessus de la surface S »).
   Construire sur cette figure 2, la projection orthogonale sur le plan (xOy) des points dont les coordonnées vérifient $x + y = 5$.
   Placer sur cette figure 2 le point C_1, projeté orthogonal du point C sur le plan (xOy).

Exercice 3 *(5 points)*

Commun à tous les candidats

Le tableau ci-dessous donne l'évolution du montant des ventes d'appareils photos numériques en France, en milliers d'euros, entre 1999 et 2004.

Année	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6
Montant des ventes y_i	179	332	584	1 092	2 675	4 164

1. Calculer l'augmentation, en pourcentage, du montant des ventes entre 1999 et 2000 puis entre 2000 et 2001. On exprimera ces pourcentages par un nombre entier en effectuant un arrondi.

   Peut-on additionner ces augmentations successives pour obtenir le pourcentage d'augmentation entre 1999 et 2001? Justifier.

2. La rapidité de la croissance suggère un ajustement de type exponentiel. On pose : $z_i = \ln(y_i)$.
   a) Présenter la série statistique $(x_i ; z_i)$ dans un tableau en arrondissant les valeurs de z_i au centième.
   b) Donner une équation de la droite d'ajustement affine de z en x par la méthode des moindres carrés, les coefficients seront arrondis au centième.
   c) En utilisant cet ajustement, donner une estimation du montant des ventes pour l'année 2008, arrondie au millier d'euros.

3. Du fait de l'apparition des téléphones mobiles avec appareil photo intégré, on a observé un ralentissement dans la progression des ventes, avec un montant de 5027 milliers d'euros en 2005 puis une diminution de 10% en 2006.
   a) Calculer le montant des ventes, arrondi au millier d'euros, pour 2006.
   b) En supposant qu'après 2006 le montant des ventes continuera de baisser de 10% par an, quelle prévision peut-on faire pour 2008 ? (*On arrondira le montant au millier d'euros)*

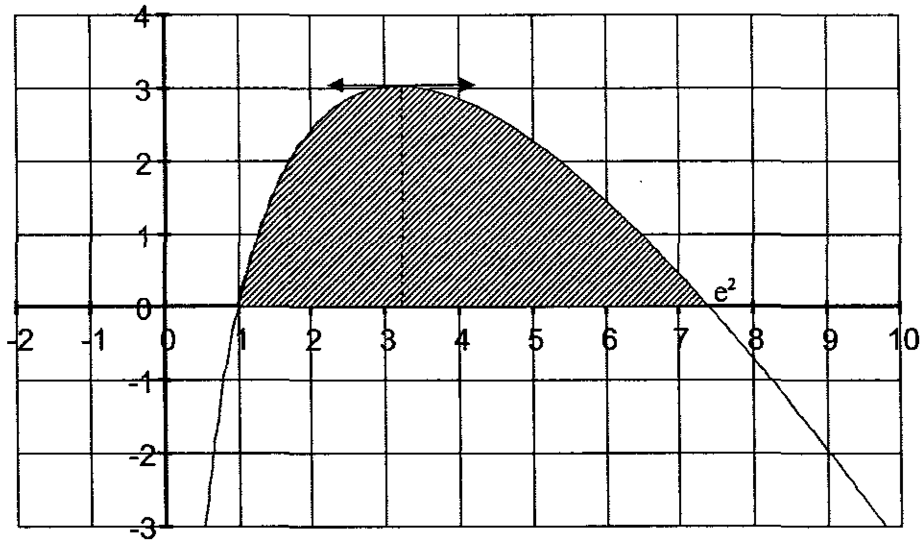
Exercice 4 *(7 points)*

Commun à tous les candidats

Dans une entreprise, on a modélisé le bénéfice réalisé, en milliers d'euros, pour la vente de x centaines d'appareils par la fonction f définie sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$ par :

$$f(x) = -2x + (e^2 - 1)\ln x + 2.$$

La courbe de la fonction f est donnée sur la figure ci-dessous :



1. Vérifier par le calcul que $f(1) = 0$ et $f(e^2) = 0$.

2. A l'aide du graphique, déterminer approximativement :
   a) le nombre d'appareils que l'entreprise doit fabriquer pour réaliser un bénéfice maximal et le montant de ce bénéfice ;
   b) les valeurs de x pour lesquelles le bénéfice réalisé est positif ou nul.

3. a) Déterminer la dérivée f' de la fonction f sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$.
   b) Etudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de la fonction f.
   c) En déduire le nombre d'appareils vendus par cette entreprise quand elle réalise le bénéfice maximal (*le résultat sera arrondi à l'unité*).

4. Parmi les courbes données en annexe 2, une seule correspond à celle d'une primitive de f. Déterminer la courbe qui convient, en expliquant votre choix (on pourra s'appuyer sur le signe de $f(x)$).

5. En utilisant le résultat de la question précédente, en déduire, par une lecture graphique, une valeur approchée (en unité d'aire) de l'aire du domaine hachuré dans la figure ci-dessus.

6. a) Démontrer que la fonction F définie sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$ par :
   $$F(x) = -x^2 + (3 - e^2)x + (e^2 - 1)x\ln x \qquad \text{est une primitive de } f.$$
   b) Déterminer la valeur moyenne du bénéfice de l'entreprise sur l'intervalle où ce bénéfice est positif ou nul.

ANNEXE 1 : exercice 2
A rendre avec la copie

Figure 1

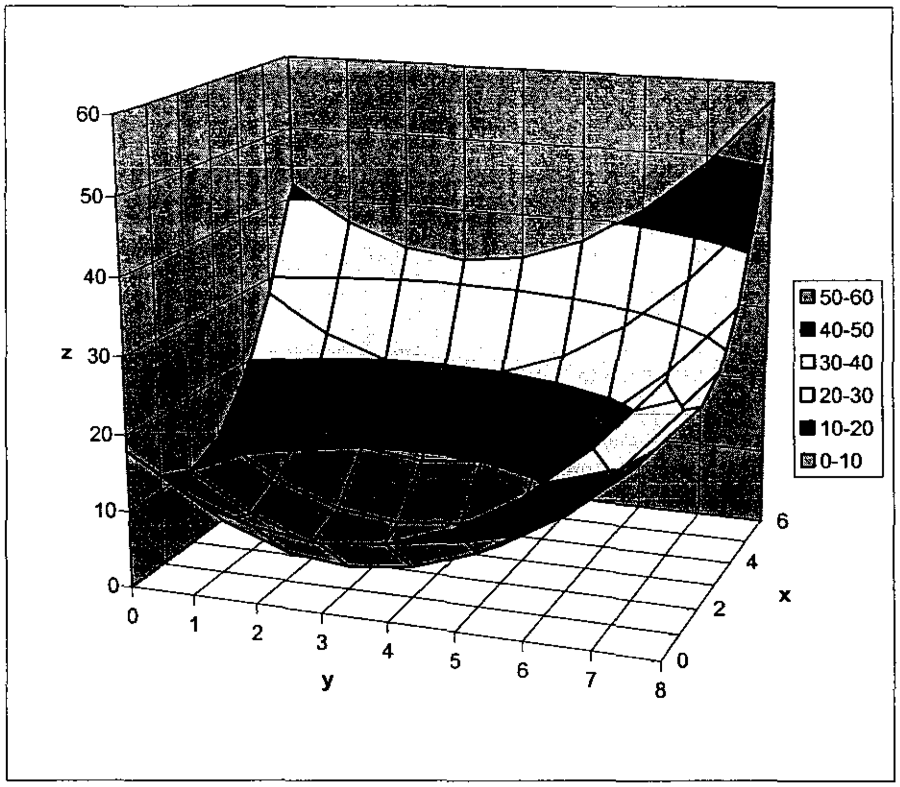
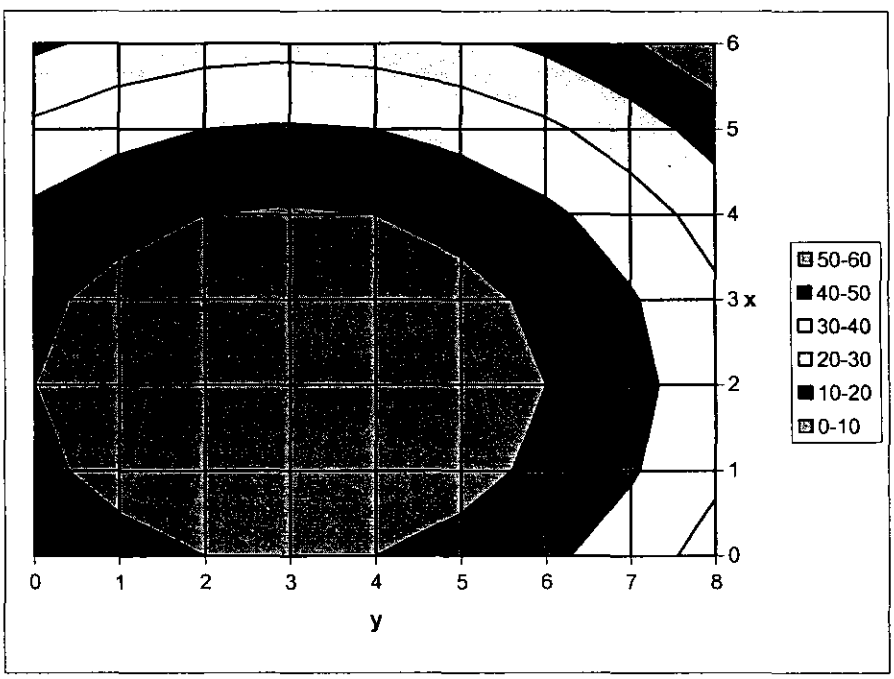
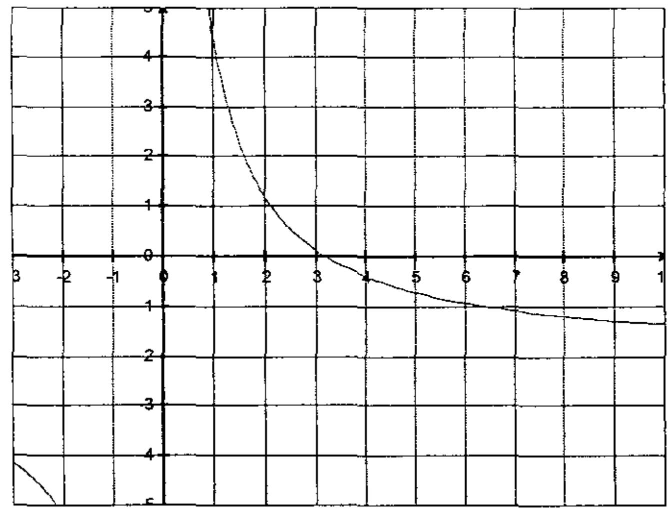


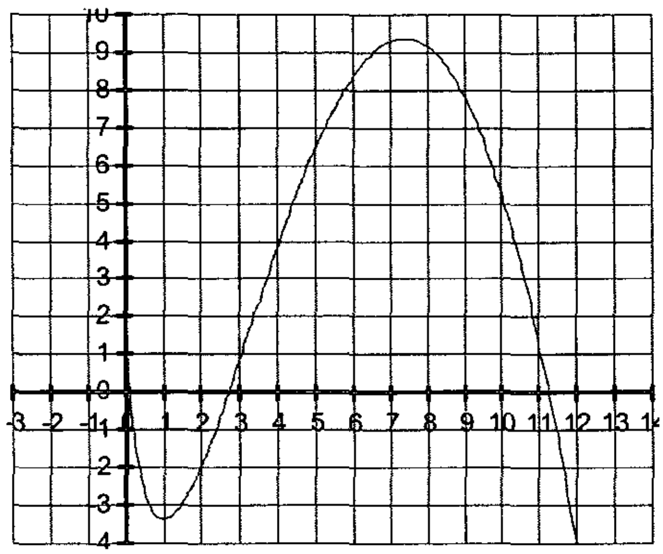
Figure 2



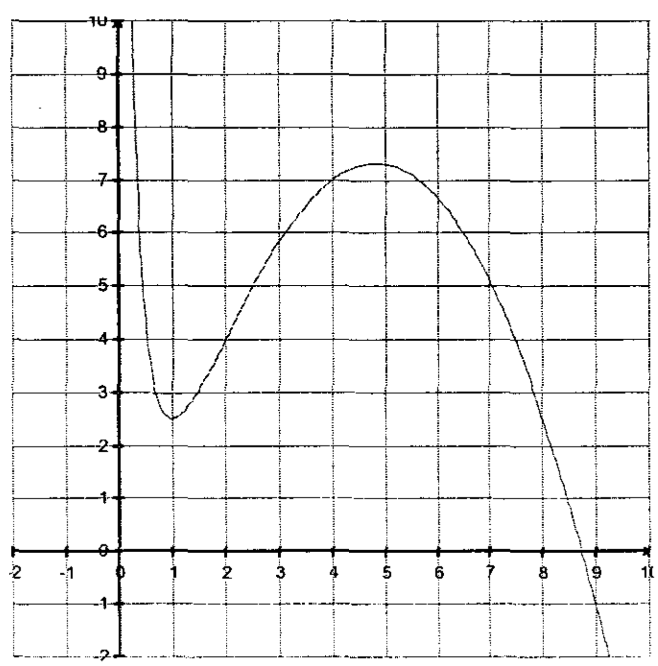
ANNEXE 2 : exercice 4



Courbe de F_1



Courbe de F_2



Courbe de F_3