

# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2007

ÉPREUVE DE SPÉCIALITÉ DE MATHÉMATIQUES

*Série L*

*Durée de l'épreuve : 3 heures*

*Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4.*

*L'usage d'une calculatrice est autorisé.*

*La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

## Exercice 1 (6 points)

Les élèves d'une école de musique sont répartis en trois catégories :

- ceux inscrits à un cours d'instruments à cordes,
- ceux inscrits à un cours d'instruments à vent,
- ceux inscrits au cours de batterie.

Chaque élève est inscrit à un seul cours.

60 % des élèves sont inscrits à un cours d'instruments à cordes et 10 % au cours de batterie.  
70 % des élèves inscrits à un cours d'instruments à cordes sont des filles et 60 % des élèves inscrits à un cours d'instruments à vent sont des garçons.

On interroge au hasard un élève (garçon ou fille) de cette école.

On note  $C$ ,  $V$ ,  $B$ ,  $F$ ,  $G$  les événements suivants :

- $C$  : « l'élève interrogé est inscrit à un cours d'instruments à cordes »
- $V$  : « l'élève interrogé est inscrit à un cours d'instruments à vent »
- $B$  : « l'élève interrogé est inscrit au cours de batterie »
- $F$  : « l'élève interrogé est une fille »
- $G$  : « l'élève interrogé est un garçon »

***On pourra utiliser un arbre de probabilités pour décrire la situation***

1. Donner, à l'aide de l'énoncé :
  - a) les probabilités  $P(B)$  et  $P(C)$  des événements  $B$  et  $C$ ,
  - b) la probabilité  $P_C(F)$  que l'élève interrogé soit une fille sachant qu'il est inscrit à un cours d'instruments à cordes,
  - c) la probabilité  $P_V(G)$  que l'élève soit un garçon sachant qu'il est inscrit à un cours d'instruments à vent.
2. Calculer la probabilité  $P(C \cap F)$  d'interroger une fille inscrite à un cours d'instruments à cordes.
3. Calculer la probabilité d'interroger une fille inscrite à un cours d'instruments à vent.
4. On sait que 56 % des élèves de cette école sont des filles.
  - a) Montrer que la probabilité d'interroger une fille inscrite au cours de batterie est 0,02.
  - b) Calculer la probabilité d'interroger un élève inscrit au cours de batterie sachant que c'est une fille (*on donnera le résultat en pourcentage*).

### Exercice 2 (4 points)

Un nombre entier naturel  $N$  s'écrit  $\overline{cabc}$  dans le système de numération à base cinq où  $a, b, c$  sont non nuls, c'est-à-dire :

$$N = c \times 5^3 + a \times 5^2 + b \times 5 + c$$

où  $a, b, c$  sont des entiers tels que  $0 < a < 5, 0 < b < 5, 0 < c < 5$

Ce même nombre  $N$  s'écrit  $\overline{aba}$  dans le système de numération à base huit.

1. Montrer que  $N = 65a + 8b$  et en déduire que  $40a = 126c - 3b$ .
2. a) Justifier que  $40a \equiv 0 \pmod{3}$ . En déduire la valeur de  $a$ .  
 b) Montrer que  $b \equiv 0 \pmod{2}$ . Déterminer les valeurs de  $b$  et  $c$ .  
 c) Donner l'écriture de l'entier  $N$  dans les bases cinq, huit et dix.

### Exercice 3 (sur 5 points)

Dans cet exercice, pour chacune des questions, une et une seule des réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée, il est seulement demandé de rappeler le numéro de la question et la réponse choisie :  $a, b$  ou  $c$ .

Chaque bonne réponse rapporte 1 point et chaque mauvaise réponse enlève 0,5 point.

L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.

En cas de total négatif pour l'ensemble de l'exercice, la note attribuée est 0.

Question	Énoncé	Réponses proposées		
		$a$	$b$	$c$
1	Le nombre $\ln\left(\frac{1}{e^3}\right)$ est égal à :	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-3$
2	Le nombre $-4$ est solution de l'équation :	$e^{\ln x} = -4$	$\ln x = -\ln 4$	$\ln(e^x) = -4$
3	L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $\ln(1-x) > 0$ est l'intervalle :	$] -\infty, 1[$	$] -\infty, 0[$	$] 0, +\infty[$
4	Dans un repère orthogonal du plan, $\mathcal{C}$ est la courbe représentative de la fonction $g$ définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par : $g(x) = x \ln x.$ Le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ au point $A(1 ; 0)$ est :	1	-3	0
5	La fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{e^x}$ admet pour dérivée la fonction $f'$ définie sur $\mathbb{R}$ par :	$f'(x) = \frac{1}{e^x}$	$f'(x) = (1-x)e^{-x}$	$f'(x) = \frac{1+x}{e^x}$

### Exercice 4 (sur 5 points)

Le service commercial d'un journal a constaté que chaque année, il enregistre 1 000 nouveaux abonnés mais 50 % des anciens abonnés environ ne renouvellent pas leur abonnement.

L'objet de cet exercice est d'étudier l'évolution du nombre d'abonnés si cette situation perdure sachant qu'au cours de l'année écoulée, le journal comptait 4 000 abonnés.

Dans ce but, on considère la suite  $(u_n)$  définie par :

$$u_0 = 4 \text{ et, pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = 0,5u_n + 1$$

1. Expliquer pourquoi, pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $u_n$  est une approximation du nombre de milliers d'abonnés au bout de  $n$  années.
2. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous.

$n$	0	1	2	3	4	5
$u_n$						

3. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que :

$$\text{Pour tout entier naturel } n, u_n > 2$$

4. Soit  $(v_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par  $v_n = u_n - 2$ .
  - a) Démontrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison 0,5.  
Préciser la valeur de  $v_0$ .
  - b) En déduire l'expression de  $v_n$  en fonction de  $n$ .
5.
  - a) En utilisant le résultat de la question précédente, démontrer que :  
Pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = 2(1 + 0,5^n)$ .
  - b) Quelle est la limite de la suite  $(u_n)$  ?
  - c) Donner une interprétation de cette limite.