BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2007

SÉRIE L

MATHÉMATIQUES

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient : 3

L'usage d'une calculatrice est autorisé.

Le candidat doit traiter tous les exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des justifications entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le sujet comporte 4 pages, y compris celle-ci.

EXERCICE 1 (5 points)

Pour tout nombre entier $n \geq 1$, on considère le nombre entier $11^n + 5^n - 7$.

1) **a)** Quel est le reste de 11 dans la division euclidienne par 10 ?

b) Démontrer que, pour tout nombre entier $n \geq 1$, $11^n \equiv 1 \pmod{10}$.

2) Démontrer que, pour tout nombre entier $n \geq 1$, $5^n \equiv 5 \pmod{10}$.
(On pourra utiliser un raisonnement par récurrence ou s'appuyer sur des propriétés de divisibilité).

3) Déterminer le plus petit nombre entier naturel p tel que $11^n + 5^n - 7 \equiv p \pmod{10}$.

4) Quel est le chiffre des unités du nombre $11^{2007} + 5^{2007} - 7$? Justifier la réponse donnée.

EXERCICE 2 (5 points)

Dans un jeu, on dispose d'une urne contenant une boule noire et quatre boules blanches, ainsi que d'un dé bien équilibré.
Une partie consiste pour un joueur à prélever au hasard une boule dans l'urne, puis :

- si la boule tirée est blanche, il lance le dé et gagne si le numéro obtenu est inférieur ou égal à 4,
- si la boule tirée est noire, il lance le dé et gagne si le numéro obtenu est pair.

On considère les événements suivants :

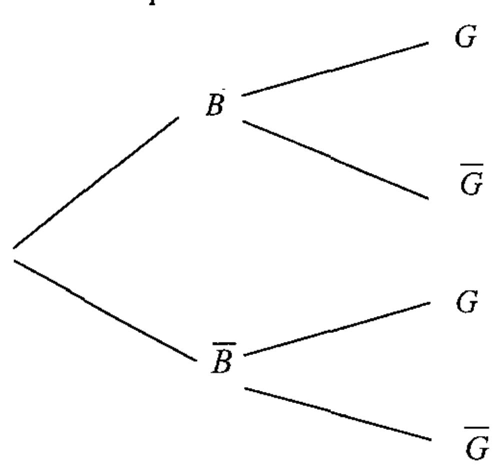
B : " le joueur tire une boule blanche ",
G : " le joueur gagne la partie ".

On note $\overline{B}$ et $\overline{G}$ les événements contraires de B et de G.

1) Calculer la probabilité que le joueur tire une boule blanche.

2) Calculer la probabilité que le joueur gagne la partie sachant qu'il a tiré une boule blanche.

3) Reproduire et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous.



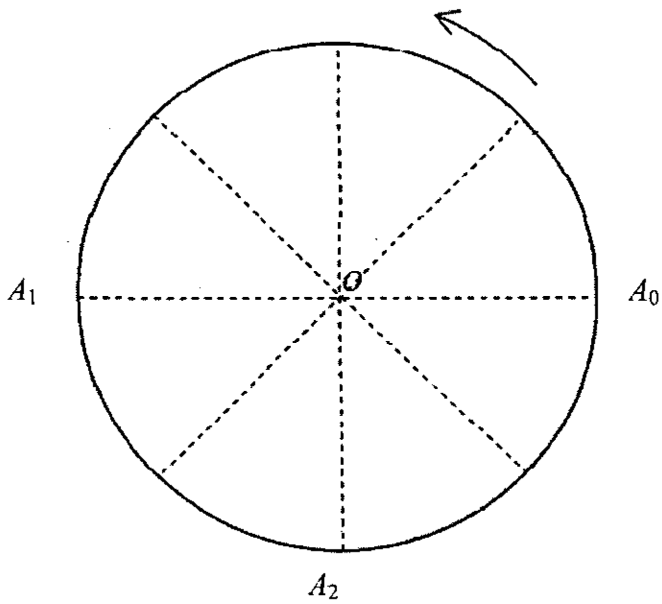
4) Montrer que la probabilité que le joueur gagne la partie est égale à $\frac{19}{30}$.

5) Le joueur gagne la partie. Quelle est la probabilité qu'il ait tiré une boule blanche ?

EXERCICE 3 (5 points)

Un robot miniature se déplace sur un cercle de centre O et de rayon 1 mètre. Il est déposé au point A_0 puis il parcourt le cercle en tournant dans le sens direct (sens de la flèche sur la figure).
Il est décidé que son trajet s'effectuera en plusieurs étapes (voir figure).

Étape 1 : il parcourt le demi-cercle de A_0 à A_1, la distance parcourue est notée d_1.
Étape 2 : il parcourt le quart de cercle de A_1 à A_2, la distance parcourue est notée d_2.
Étape *n*, *avec* $n \geq 2$: il parcourt l'arc de cercle allant de A_{n-1} à A_n, la distance parcourue, notée d_n, étant la moitié de celle parcourue à l'étape précédente.



On rappelle que :

- Le périmètre d'un cercle de rayon 1 mètre est égal à 2π mètres.
- $1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$, pour tout nombre réel $q \neq 1$.

1) a) Exprimer d_1 et d_2 en fonction de π.

b) Reproduire la figure, puis placer le point A_3. Justifier que $d_3 = \dfrac{\pi}{4}$.

2) a) Quelle est la nature de la suite (d_n) ? Justifier la réponse donnée.

b) Montrer que, pour tout nombre entier $n \geq 1$, $d_n = \pi\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.

3) On s'intéresse à la distance totale, notée D_n, parcourue par le robot sur le cercle à la fin de l'étape n.

a) Calculer D_2.

b) Démontrer que, pour tout nombre entier $n \geq 1$, $D_n = 2\pi\left(1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$.

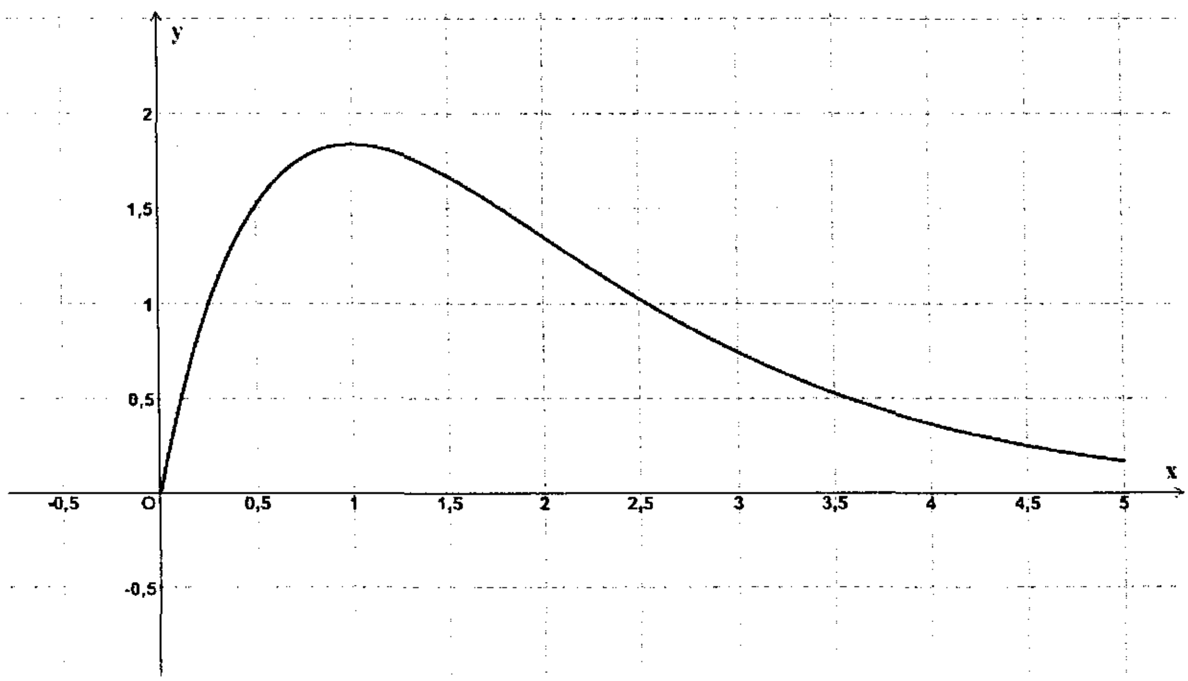
c) Déterminer la limite de la suite (D_n).

d) Justifier que, pour tout nombre entier $n \geq 1$, $D_n < 2\pi$.
Que peut-on en déduire pour le déplacement du robot sur le cercle ?

EXERCICE 4 (5 points)

Suivant la prescription de son médecin, Pascal s'administre un médicament, lequel passe progressivement dans le sang comme il est aussi progressivement éliminé. Une documentation technique propose la fonction f définie sur [0 ; 5] par $f(t) = 5\,t\,e^{-t}$ pour décrire la concentration, en mg/L, en fonction du temps écoulé t, en heures, valable pour les 5 heures après la prise.
Par ailleurs il est bien indiqué, pour prendre le volant de sa voiture, d'attendre que cette concentration soit inférieure à 0,25 mg/L.

Une courbe représentative de la fonction f est donnée ci-dessous.



1) Étude de la fonction f sur [0 ; 5].

a) Soit f' la fonction dérivée de f. Vérifier que $f'(t) = 5(1-t)e^{-t}$.

b) Étudier le signe de $f'(t)$ sur [0 ; 5].

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

2) Utilisation de la fonction f.

a) Au bout de combien de temps la concentration du médicament est-elle la plus élevée ?

b) Il ne faut pas conduire tant que la concentration est supérieure ou égale à 0,25 mg/L.
Par lecture graphique, déterminer, avec la précision permise par le graphique, au bout de combien de temps après la prise du médicament Pascal pourra prendre le volant.

Note informative
La documentation sur le médicament, administré de façon non intraveineuse, précise que les échanges concernés par le passage dans le sang comme par l'élimination se font essentiellement dans un seul sens, suivant des lois qui mettent en jeu des constantes de temps voisines ; les coefficients sont bien sûr adaptés à la morphologie de Pascal.