CORRECTION DU BAC 2007

Terminale S	*Amérique du Nord*

Exercice 1

1) Soit (P) le plan dont une équation est : $2x + y - 3z + 1 = 0$. Alors $\vec{n}$, de coordonnées $(2\ ;1\ ;\ -3)$, est un vecteur normal de (P).

Comme H est le projeté orthogonal de A sur (P), alors $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires. Il existe donc un réel k tel que $\overrightarrow{AH} = k\ \vec{n}$, c'est-à-dire $\begin{cases} x_H - 1 = 2k \\ y_H - 11 = k \\ z_H - 7 = -3k \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} x_H = 1 + 2k \\ y_H = 11 + k \\ z_H = 7 - 3k \end{cases}$ (1).

De plus, H appartient à (P), alors : $2(1 + 2k) + (11 + k) - 3(7 - 3k) + 1 = 0$; d'où :

$14k - 7 = 0$. On en déduit que $k = \frac{1}{2}$.

En remplaçant dans (1), on obtient : $\begin{cases} \boldsymbol{x_H = 2} \\ \boldsymbol{y_H = \frac{23}{2}} \\ \boldsymbol{z_H = \frac{11}{2}} \end{cases}$.

La proposition 1 est donc fausse.

Autre justification : Soit (P) le plan dont une équation est : $2x + y - 3z + 1 = 0$. Alors $\vec{n}$, de coordonnées $(2\ ;1\ ;\ -3)$, est un vecteur normal de (P).

On remarque que $H\ (0\,;2\,;1)$ appartient à (P) car $2 \times 0 + 2 - 3 \times 1 + 1 = 0$.

De plus, le vecteur $\overrightarrow{AH}$ a pour coordonnées $(-1\ ;\ -9\ ;\ -6)$.

$\frac{x_{\overrightarrow{AH}}}{x_{\vec{n}}} = -\frac{1}{2}$; $\frac{y_{\overrightarrow{AH}}}{y_{\vec{n}}} = -9$ et $\frac{z_{\overrightarrow{AH}}}{z_{\vec{n}}} = 2$; comme les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{n}$ ne sont pas proportionnelles, alors $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{n}$ ne sont pas colinéaires.

Par conséquent, **le point *H* ne peut pas être le projeté orthogonal de *A* sur (P)**.

2) Les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions définies sur **R** par $x \mapsto Ce^{-2x} - \frac{2}{-2} = Ce^{-2x} + 1$, où C est une constante réelle.

Comme u est la solution de (E) vérifiant $u(0) = 0$, alors $Ce^0 + 1 = 0$, c'est-à-dire $C = -1$.

Donc $u(x) = -e^{-2x} + 1$.

On en déduit que : $u\left(\frac{\ln 2}{2}\right) = -e^{-\ln 2} + 1 = -e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} + 1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$.

La proposition 2 est donc vraie.

3) Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « pour tout n de **N**, $0 \leq u_n \leq 7$ »

→ Comme $u_0 = 2$, alors on a $\mathscr{P}(0)$ qui est vraie.

→ Montrons que pour tout $n \geq 1$, on a : $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n + 1)$.

C. Lainé

Soit $n \geq 1$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Alors : $0 \leq u_n \leq 7$.
En multipliant les membres de l'inégalité précédente par 7, on obtient : $0 \leq 7u_n \leq 49$.
Comme la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$, donc sur $[0\ ;\ 49]$, alors $\sqrt{0} \leq \sqrt{7u_n} \leq \sqrt{49}$, c'est-à-dire $0 \leq u_{n+1} \leq 7$.
On en déduit que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

On a alors prouvé :

$\mathscr{P}(0)$ et pour tout n supérieur ou égal à 1, $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$.

$\rightarrow$ Du principe de raisonnement par récurrence, on déduit :

pour tout n supérieur ou égal à 1, $\mathscr{P}(n)$ est vraie

C'est-à-dire : pour tout n de $\mathbf{N}$, $0 \leq u_n \leq 7$.
La proposition 3 est donc vraie.

<u>**Exercice 2**</u>

1) a) **L'écriture complexe de la r est de la forme** $z' - z_O = e^{i\frac{2\pi}{3}}(z - z_O)$, c'est-à-dire $\boldsymbol{z' = e^{i\frac{2\pi}{3}} z}$.

b) Comme C est l'image de B par r, alors $z_C = z_B e^{i\frac{2\pi}{3}} = e^{-i\frac{5\pi}{6}} \times e^{i\frac{2\pi}{3}} = e^{i\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{5\pi}{6}\right)} = e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

Donc **l'affixe de C est $e^{-i\frac{\pi}{6}}$**.

c) $\boldsymbol{z_B} = e^{-i\frac{5\pi}{6}} = \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \boldsymbol{-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i}$

$\boldsymbol{z_C} = e^{-i\frac{\pi}{6}} = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i}$

d) Voir la figure à la fin de l'exercice.

2) a) Comme D est le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients 2, −1 et 2, alors on peut écrire :

$$z_D = \frac{2z_A - z_B + 2z_C}{2-1+2} = \frac{2i + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i + \sqrt{3} - i}{3} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i}{3}.$$

Par conséquent, $\boldsymbol{z_D = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i}$.

b) $OA = |z_A - z_O| = |i| = 1$; $OB = |z_B - 0| = \left|e^{-i\frac{5\pi}{6}}\right| = 1$; $OC = |z_C - 0| = \left|e^{-i\frac{\pi}{6}}\right| = 1$ et

$OD = |z_D - z_O| = \left|\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right| = 1$.

Par conséquent, **les points A, B, C et D sont sur le cercle de centre O et de rayon 1**.

3) a) L'écriture complexe de h est de la forme $z' - z_A = 2(z - z_A)$, c'est-à-dire $\boldsymbol{z' = 2z - i}$.

b) Comme E est l'image de D par h, alors $z_E = 2z_D - i = \sqrt{3} + i - i = \sqrt{3}$.
Par conséquent, l'affixe de E est $\boldsymbol{z_E = \sqrt{3}}$.

4) a) $\dfrac{z_D - z_C}{z_E - z_C} = \dfrac{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)}{\sqrt{3}-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)} = \dfrac{i}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i} = \dfrac{i\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)}{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)} = \dfrac{\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{1}$.

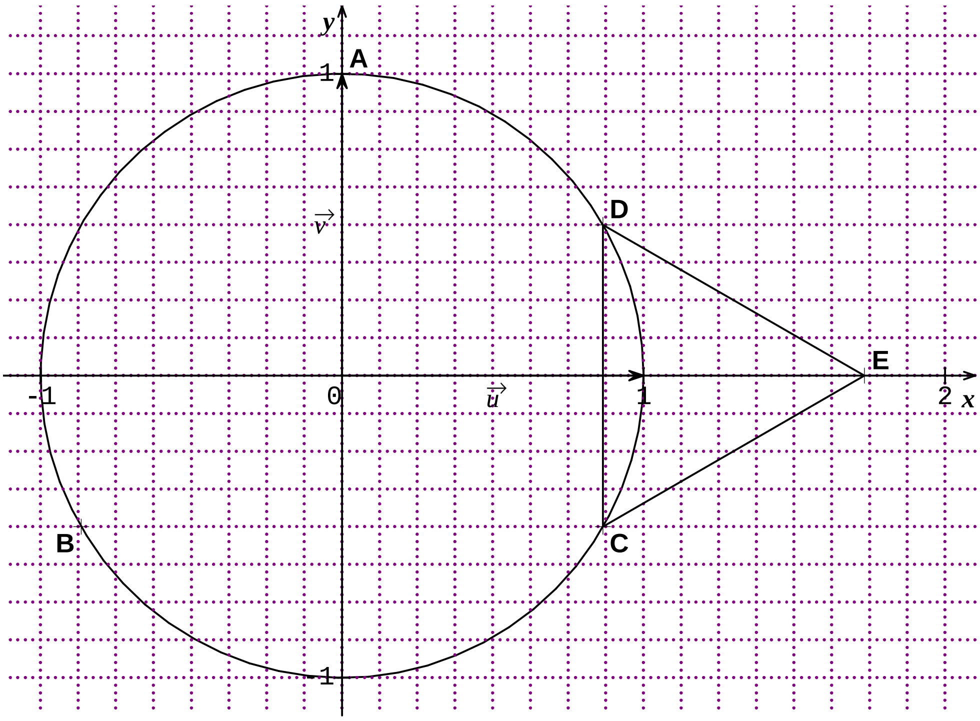
Par conséquent, $\boldsymbol{\dfrac{z_D - z_C}{z_E - z_C}} = \dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2} \boldsymbol{= e^{i\frac{\pi}{3}}}$.

b) $\dfrac{CD}{CE} = \dfrac{|z_D - z_C|}{|z_E - z_C|} = \left|\dfrac{z_D - z_C}{z_E - z_C}\right|$. Or, $\dfrac{z_D - z_C}{z_E - z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ d'après la question précédente.

D'où : $\dfrac{CD}{CE} = \left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right| = 1$, et par suite $CD = CE$. On en déduit que CDE est isocèle en C.

De plus, $\left(\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CD}\right) = \arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_E - z_C}\right) = \arg\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.

Par conséquent, **le triangle *CDE* est équilatéral**.



Exercice 3

1) a) Comme le joueur réalise trois parties, **les valeurs que peut prendre *X* sont : 0 ; 1 ; 2 et 3**.

b) ➢ $p(X=2) = p\left(\overline{E_1}\cap E_2 \cap E_3\right) + p\left(E_1 \cap \overline{E_2} \cap E_3\right) + p\left(E_1 \cap E_2 \cap \overline{E_3}\right)$.

D'après l'arbre pondéré suivant, on en déduit que :

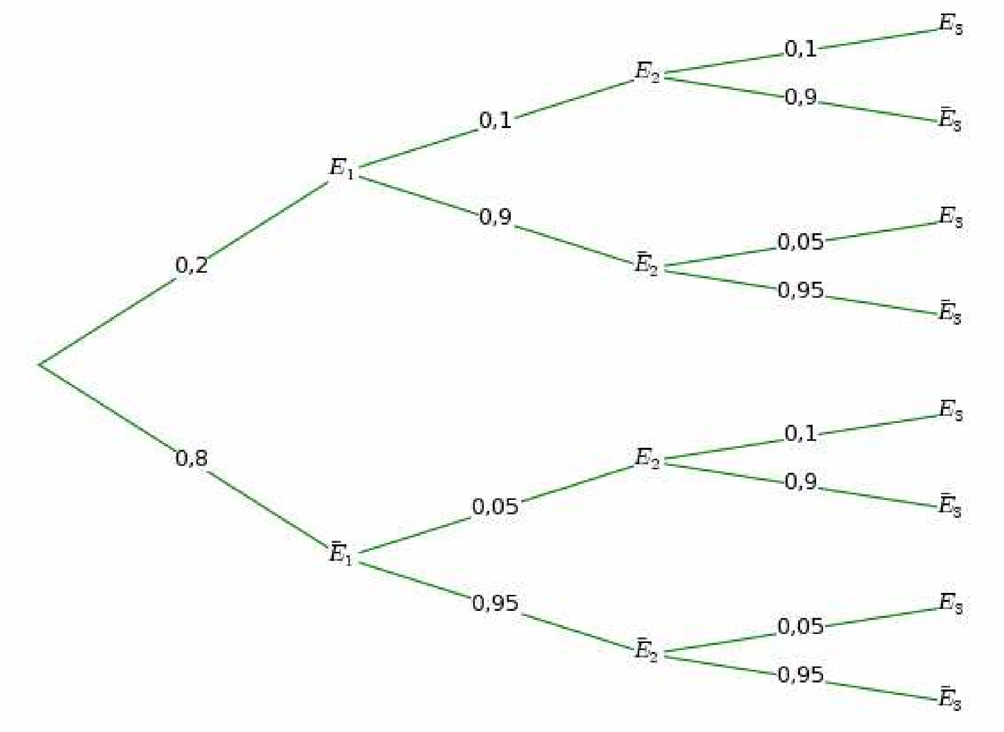
$p(X=2) = 0,8\times 0,05\times 0,1 + 0,2\times 0,9\times 0,05 + 0,2\times 0,1\times 0,9 = 0,031$.

Par conséquent, **la probabilité de l'événement $(X=2)$ est égale à 0,031**.

➢ $p(X=3) = p(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$. D'après l'arbre pondéré suivant, on en déduit que :

$p(X=3) = 0,2\times 0,2\times 0,1 = 0,002$.

Par conséquent, **la probabilité de l'événement $(X=3)$ est égale à 0,002**.



d) $p(X=0)=p\left(\overline{E_1}\cap\overline{E_2}\cap\overline{E_3}\right)=0,8\times0,95\times0,95=0,722$

$p(X=1)=p\left(\overline{E_1}\cap\overline{E_2}\cap E_3\right)+p\left(\overline{E_1}\cap E_2\cap\overline{E_3}\right)+p\left(E_1\cap\overline{E_2}\cap\overline{E_3}\right)=0,245$.

La loi de probabilité de X est donc :

x_i	0	1	2	3
$p(X=x_i)$	**0,722**	**0,245**	**0,031**	**0,002**

d) $\boldsymbol{E(X)}=0\times0,722+1\times0,245+2\times0,031+3\times0,002=\mathbf{0,313}$.

2) a) $p(E_n\cap E_{n+1})=p_{E_n}(E_{n+1})\times p(E_n)$.

Or $p_{E_n}(E_{n+1})$ est la probabilité qu'il perde la $(n+1)$ième partie sachant qu'il a perdu la n ième partie ; elle est donc égale à 0,1. De plus, $p(E_n)=p_n$.

Par conséquent, $\boldsymbol{p(E_n\cap E_{n+1})=}$ $\boldsymbol{p_n}$.

$p\left(\overline{E_n}\cap E_{n+1}\right)=p_{\overline{E_n}}(E_{n+1})\times p\left(\overline{E_n}\right)$.

Or $p_{\overline{E_n}}(E_{n+1})$ est la probabilité qu'il perde la $(n+1)$ième partie sachant qu'il a gagné la n ième partie ; elle est donc égale à 0,05. De plus, $p\left(\overline{E_n}\right)=1-p(E_n)=1-p_n$.

Par conséquent, $\boldsymbol{p\left(\overline{E_n}\cap E_{n+1}\right)=0,05(1-p_n)}$.

b) E_n et $\overline{E_n}$ forment une partition de l'univers, alors d'après la formule des probabilités totales, $p(E_{n+1})=p(E_n\cap E_{n+1})+p\left(\overline{E_n}\cap E_{n+1}\right)=0,1p_n+0,05(1-p_n)=0,05p_n+0,05$.

Par conséquent, $\boldsymbol{p_{n+1}=}$ $\boldsymbol{p_n+}$, **pour tout entier naturel n non nul**.

3) a) Soit n un entier naturel non nul :

$$u_{n+1}=p_{n+1}-\frac{1}{19}=0{,}05p_n+0{,}05-\frac{1}{19}=0{,}05p_n-\frac{1}{380}=0{,}05\left(p_n-\frac{1}{380\times 0{,}05}\right)=0{,}05\left(p_n-\frac{1}{19}\right)=0{,}05u_n$$

Par conséquent, **la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,05 et de premier terme** $\boldsymbol{u_1}=p_1-\frac{1}{19}=0{,}2-\frac{1}{19}=\boldsymbol{\frac{14}{95}}$.

b) D'après la question précédente, on en déduit que, pour **tout entier naturel *n* non nul**, $\boldsymbol{u_n=\frac{14}{95}\times(0{,}05)^{n-1}}$, et par suite, $\boldsymbol{p_n}=u_n+\frac{1}{19}\boldsymbol{=\frac{14}{95}\times(0{,}05)^{n-1}+\frac{1}{19}}$.

c) $(0{,}05)^{n-1}=\frac{(0{,}05)^n}{0{,}05}$. Or $-1<0{,}05<1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(0{,}05)^n=0$; d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(0{,}05)^n}{0{,}05}=0$.

Par conséquent, $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty}p_n=\frac{1}{19}}$.

<u>Exercice 4</u> *(Amérique du Nord, juin 2006)*

1) **Restitution organisée de connaissances.**

a) La fonction g est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ en tant que somme de deux fonctions $x\mapsto \mathrm{e}^x$ et $x\mapsto -\frac{x^2}{2}$ dérivables sur **R**, donc sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Pour tout réel x strictement positif, $g'(x)=\mathrm{e}^x-x$.

Or, pour tout réel x, on a : $\mathrm{e}^x>x$. On en déduit que $g'(x)>0$ pour tout réel x.

Par conséquent, la fonction g est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

De plus, $g(0)=\mathrm{e}^0-0=1$, on peut conclure que la fonction g est strictement positive sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Par conséquent, **pour tout x de $[0\,;+\infty[$, $g(x)\geq 0$**.

b) D'après la question précédente, on peut écrire que, pour tout x de $[0\ ;\ +\infty[$, $e^x-\frac{x^2}{2}\geq 0$, c'est-à-dire $e^x\geq\frac{x^2}{2}$. Si x est un réel strictement positif, alors $\frac{e^x}{x}\geq\frac{x}{2}$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{2}=+\infty$, donc d'après le théorème de comparaison, $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x}=+\infty}$.

2) a) Comme $\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}>0$ pour tout réel x, et que $\frac{1}{4}x\geq 0$ pour tout x de $[0\ ;\ +\infty[$.

Par conséquent, ***f* est positive sur $[0\,;+\infty[$**.

b) $f(x)=\frac{1}{4}x\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}=\dfrac{\frac{1}{4}x}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}=\frac{1}{2}\times\dfrac{\frac{x}{2}}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}=\frac{1}{2}\times\dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}}}$.

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$ et que $\lim\limits_{X \to +\infty} \mathrm{e}^X = +\infty$, d'après la limite d'une fonction composée,

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} = +\infty$. D'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}}} = 0$. Par conséquent, $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0}$.

On en déduit que **la courbe (C) admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$**.

c) La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$ est dérivable sur **R** en tant que composée de la fonction $x \mapsto -\dfrac{x}{2}$, dérivable sur **R**, et de la fonction exponentielle dérivable sur **R**.

La fonction $x \mapsto \dfrac{x}{4}$, dérivable sur **R**.

Par conséquent, la fonction f est dérivable sur **R** en tant que produit de deux fonctions dérivables sur **R**.

On a : $f = u \times \mathrm{e}^v$ avec $u(x) = \dfrac{1}{4}x$ et $v(x) = -\dfrac{1}{2}x$.

Alors : $f' = u' \times \mathrm{e}^v + u \times v'\mathrm{e}^v$ avec $u'(x) = \dfrac{1}{4}$ et $v'(x) = -\dfrac{1}{2}$.

D'où : $f'(x) = \dfrac{1}{4} \times \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + \dfrac{x}{4} \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} = \dfrac{1}{4}\left(1 - \dfrac{x}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$, pour tout réel x strictement positif.

Comme $\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} > 0$ pour tout réel x strictement positif, le signe de dépend de celui de $\left(1 - \dfrac{x}{2}\right)$

Or $1 - \dfrac{x}{2} = 0 \iff x = 2$, $1 - \dfrac{x}{2} > 0 \iff x < 2$ et $1 - \dfrac{x}{2} < 0 \iff x > 2$.

Par conséquent, **la fonction f est croissante sur $]-\infty\ ; 2]$ et est décroissante sur $[2 ; +\infty[$.**

On en déduit que :

x	0		2		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
variations de f	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$	$\searrow$	0

$f(0) = \dfrac{1}{4} 0 \times \mathrm{e}^0 = 0$ et $f(2) = \dfrac{2}{4}\mathrm{e}^{-1} = \dfrac{1}{2\mathrm{e}}$.

3) a) La fonction f est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$, donc continue sur $[0\ ;\ +\infty[$.

La fonction F est donc la primitive de f sur $[0\ ;\ +\infty[$ qui s'annule en 0.

Alors, pour tout réel x positif, $F'(x) = f(x)$. Or, d'après la question 2) a), f est positive sur $[0\ ;\ +\infty[$. Par conséquent, **la fonction F est croissante sur $[0 ; +\infty[$**.

b) $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^x\left(\frac{1}{4}t\ \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\right)dt=\frac{1}{4}\int_0^x\left(t\ \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\right)dt$.

Posons $\begin{cases}u(t)=t\\ v'(t)=\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\end{cases}$. Alors $\begin{cases}u'(t)=1\\ v'(t)=-2\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\end{cases}$.

Les fonctions $u'v$, uv' et $(uv)'$ sont continues et dérivables sur $[0\ ;\ +\infty[$, d'après la méthode de l'intégration par parties :

$$\int_0^x\left(t\ \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\right)dt=\left[-2t\ \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\right]_0^x-\int_0^x-2\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}dt=\left[-2t\ \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\right]_0^x+2\left[-2\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\right]_0^x=-2x\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}-4\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}+4\ .$$

Par conséquent, $F(x)=\frac{1}{4}\left(-2x\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}-4\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}+4\right)$ $\boldsymbol{=1-\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}-\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}$.

c) D'après la question 2) b), $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}=0$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{x}{2}=-\infty$ et que $\lim\limits_{X\to-\infty}\mathrm{e}^{X}=0$, d'après la limite d'une fonction composée, $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}=0$. Par somme des limites des fonctions, on en déduit que : $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1}$.

D'après la question 3) a), on a le tableau de variation suivant :

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
signe de $F'(x)$	0 $\qquad$ $+$
variations de F	0 $\nearrow$ 1

d) D'après la question précédente, la fonction F est continue et strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$, que $F(0)<0{,}5$ et $F(1)>0{,}5$, d'après le théorème de la valeur intermédiaire, **l'équation $\boldsymbol{F(x)=}$ admet une seule solution $\boldsymbol{\alpha}$ dans $\boldsymbol{[0\,;+\infty[}$.**

En utilisant la calculatrice, on obtient :

x	f(x)	x	f(x)	x	f(x)
0	0	3	0,4421746	3,3	0,49106774
1	0,09020401	3,1	0,45876767	3,31	0,49265059
2	0,26424112	3,2	0,47506905	3,32	0,49423031
3	0,4421746	3,3	0,49106774	3,33	0,4958069
4	0,59399415	3,4	0,50675449	3,34	0,49738033
5	0,7127025	3,5	0,52212166	3,35	0,49895062
6	0,80085173	3,6	0,53716311	3,36	0,50051774
7	0,86411177	3,7	0,55187408	3,37	0,5020817
8	0,90842181	3,8	0,566251	3,38	0,50364248
9	0,93890052	3,9	0,58029149	3,39	0,50520008
10	0,95957232	4	0,59399415	3,4	0,50675449

pas =0,1	pas = 0,1	pas = 0,01
donc $3 < \alpha < 4$	donc $3,3 < \alpha < 3,4$	donc $3,35 < \alpha < 3,36$

Par conséquent, **une valeur approchée de α à 10^{-2} près par excès est 3,36**.

4) Comme la fonction f est positive sur $[0\ ;\ +\infty[$, donc sur $[0\ ;\ n]$ (n étant un entier naturel non nul), alors l'aire A_n en unités d'aire de la partie du plan située entre l'axe des abscisses, la courbe (C) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = n$, est égale à $A_n = \int_0^n f(t)\,dt = F(n)$.

Alors $A_n \geq 0,5$ équivaut à $F(n) \geq 0,5$, c'est-à-dire à $F(n) \geq F(\alpha)$.

Comme la fonction F est strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$, $A_n \geq 0,5$ équivaut à $n \geq \alpha$.

Par conséquent, **le plus petit entier naturel n tel que $A_n \geq$ est 4**.