Durée : 4 heures

Baccalauréat S Amérique du Sud novembre 2007

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. *Dans cette question, on demande au candidat d'exposer des connaissances.*

On suppose connu le résultat suivant :
La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est l'unique fonction φ dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\varphi' = \varphi$, et $\varphi(0) = 1$.
Soit a un réel donné.

a. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{ax}$ est solution de l'équation $y' = ay$.

b. Soit g une solution de l'équation $y' = ay$. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = g(x)\mathrm{e}^{-ax}$. Montrer que h est une fonction constante.

c. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $y' = ay$.

2. On considère l'équation différentielle (E) : $y' = 2y + \cos x$.

a. Déterminer deux nombres réels a et b tels que la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_0(x) = a\cos x + b\sin x$$

soit une solution f_0 de (E).

b. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y' = 2y$.

c. Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - f_0$ est solution de (E_0).

d. En déduire les solutions de (E).

e. Déterminer la solution k de (E) vérifiant $k\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

On fera une figure que l'on complétera avec les différents éléments intervenant dans l'exercice.

1. On considère les points A d'affixe 1 et B d'affixe i. On appelle S la réflexion (symétrie axiale) d'axe (AB).
Montrer que l'image M' par S d'un point M d'affixe z a pour affixe
$z' = -\mathrm{i}\overline{z} + 1 + \mathrm{i}$.

2. On note H l'homothétie de centre A et de rapport -2. Donner l'écriture complexe de H.

3. On note f la composée $H \circ S$.

a. Montrer que f est une similitude.

b. Déterminer l'écriture complexe de f.

4. On appelle M'' l'image d'un point M par f.

a. Démontrer que l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{\mathrm{A}M''} = -2\overrightarrow{\mathrm{A}M}$ est la droite (AB).

b. Démontrer que l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{\mathrm{A}M''} = 2\overrightarrow{\mathrm{A}M}$ est la perpendiculaire en A à la droite (AB).

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

On fera une figure qui sera complétée au fur et à mesure.

Soit f l'application qui à tout point M de P d'affixe non nulle z associe le point M' d'affixe :

$$z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

1. Soit E le point d'affixe $z_{\mathrm{E}} = -\mathrm{i}$. Déterminer l'affixe du point E$'$, image de E par f
2. Déterminer l'ensemble des points M tels que $M' = M$.
3. On note A et B les points d'affixes respectives 1 et -1.
   Soit M un point distinct des points O, A et B.
   a. Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de 0, 1 et -1, on a :
   $$\frac{z'+1}{z'-1} = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2.$$
   b. En déduire une expression de $\dfrac{M'\mathrm{B}}{M'\mathrm{A}}$ en fonction de $\dfrac{M\mathrm{B}}{M\mathrm{A}}$ puis une expression de l'angle $\left(\overrightarrow{M'\mathrm{A}},\ \overrightarrow{M'\mathrm{B}}\right)$ en fonction de l'angle $\left(\overrightarrow{M\mathrm{A}},\ \overrightarrow{M\mathrm{B}}\right)$
4. Soit Δ la médiatrice du segment [A, B]. Montrer que si M est un point de Δ distinct du point O, alors M' est un point de Δ.
5. Soit Γ le cercle de diamètre [A, B].
   a. Montrer que si le point M appartient à Γ alors le point M' appartient à la droite (AB).
   b. Tout point de la droite (AB) a-t-il un antécédent par f ?

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

1. On considère le point A de coordonnées $(-2\ ;\ 8\ ;\ 4)$ et le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(1\ ;\ 5\ ;\ -1)$.
   Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.
2. On considère les plans (P) et (Q) d'équations cartésiennes respectives
   $x - y - z = 7$ et $x - 2z = 11$.
   Démontrer que les plans (P) et (Q) sont sécants. On donnera une représentation paramétrique de leur droite d'intersection, notée (d').
   Montrer que le vecteur de coordonnées $(2\ ;\ 1\ ;\ 1)$ est un vecteur directeur de (d').
3. Démontrer que les droites (d) et (d') ne sont pas coplanaires.
4. On considère le point H de coordonnées $(-3\ ;\ 3\ ;\ 5)$ et le point H$'$ de coordonnées $(3\ ;\ 0\ ;\ -4)$.
   a. Vérifier que H appartient à (d) et que H$'$ appartient à (d').
   b. Démontrer que la droite (HH$'$) est perpendiculaire aux droites (d) et (d').
   c. Calculer la distance entre les droites (d) et (d'), c'est-à-dire la distance HH$'$.
5. Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{M\mathrm{H}'} \cdot \overrightarrow{\mathrm{HH}'} = 126$.

EXERCICE 4 **6 points**

Commun à tous les candidats

1. On considère la fonction f_1 définie sur $[0~;~+\infty[$ par

$$f_1(x) = 2x - 2 + \ln\left(x^2 + 1\right).$$

a. Déterminer la limite de f_1 en $+\infty$.

b. Déterminer la dérivée de f_1.

c. Dresser le tableau de variations de f_1.

2. Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n, définie sur $[0~;~+\infty[$ par

$$f_n(x) = 2x - 2 + \frac{\ln\left(x^2 + 1\right)}{n}.$$

a. Déterminer la limite de f_n en $+\infty$.

b. Démontrer que la fonction f_n est strictement croissante sur $[0~;~+\infty[$.

c. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n sur $[0~;~+\infty[$

d. Justifier que, pour tout entier naturel $n,~0 < \alpha_n < 1$.

3. Montrer que pour tout entier naturel non nul $n,~f_n\left(\alpha_{n+1}\right) > 0$.

4. Étude de la suite (α_n)

a. Montrer que la suite (α_n) est croissante.

b. En déduire qu'elle est convergente.

c. Utiliser l'expression $\alpha_n = 1 - \dfrac{\ln\left(\alpha_n^2 + 1\right)}{2n}$ pour déterminer la limite de cette suite.