B A C C A L A U R É A T G É N É R A L

SESSION 2007

MATHÉMATIQUES

Série S

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 4 heures **COEFFICIENT : 7**

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5

L'usage des calculatrices est autorisé selon les termes de la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

1 feuille de papier millimétré sera mise à la disposition des candidats.

Le candidat doit traiter les QUATRE exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1 (*4 points*)
Commun à tous les candidats

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à proposer un contre-exemple. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1) Si f est la fonction définie pour tout nombre réel x par : $f(x) = \sin^2 x$, alors sa fonction dérivée vérifie, pour tout nombre réel x : $f'(x) = \sin 2x$.

2) Soit f est une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-1;1]$, dont la dérivée est continue sur cet intervalle. Si $f(-1) = -f(1)$, alors : $\int_{-1}^{1} t\, f'(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$.

3) Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $[0;3]$.
Si $\int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t \le \int_0^3 g(t)\,\mathrm{d}t$, alors pour tout nombre réel x appartenant à $[0;3]$: $f(x) \le g(x)$.

4) Si f est solution de l'équation différentielle $y' = -2y + 2$ et si f n'est pas une fonction constante, alors la représentation de f dans un repère du plan, n'admet aucune tangente parallèle à l'axe des abscisses.

Exercice 2 (*5 points*)

Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. L'unité graphique est 4 cm.

Soit λ un nombre complexe non nul et différent de 1.

On définit, pour tout entier naturel *n*, la suite (z_n) de nombres complexes par :

$$\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = \lambda \cdot z_n + \mathrm{i} \end{cases}.$$

On note M_n le point d'affixe z_n.

1) Calcul de z_n en fonction de *n* et de λ.

   a) Vérifier les égalités : $z_1 = \mathrm{i}$; $z_2 = (\lambda+1)\mathrm{i}$; $z_3 = (\lambda^2+\lambda+1)\mathrm{i}$.

   b) Démontrer que, pour tout entier *n* positif ou nul : $z_n = \dfrac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}\mathrm{i}$.

2) Etude du cas $\lambda = \mathrm{i}$.

   a) Montrer que $z_4 = 0$.

   b) Pour tout entier naturel *n*, exprimer z_{n+4} en fonction de z_n.

   c) Montrer que M_{n+1} est l'image de M_n par une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

   d) Représenter les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4 dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.

3) Caractérisation de certaines suites (z_n).

   a) On suppose qu'il existe un entier naturel k tel que $\lambda^k = 1$.
   Démontrer que, pour tout entier naturel *n*, on a l'égalité : $z_{n+k} = z_n$.

   b) Réciproquement, montrer que s'il existe un entier naturel k tel que, pour tout entier naturel *n*, on ait l'égalité $z_{n+k} = z_n$, alors : $\lambda^k = 1$.

Exercice 3 (*4 points*)
Commun à tous les candidats

Une fabrique artisanale de jouets en bois vérifie la qualité de sa production avant sa commercialisation. Chaque jouet produit par l'entreprise est soumis à deux contrôles : d'une part l'aspect du jouet est examiné afin de vérifier qu'il ne présente pas de défaut de finition, d'autre part sa solidité est testée. Il s'avère, à la suite d'un grand nombre de vérifications, que :

- 92 % des jouets sont sans défaut de finition ;
- parmi les jouets qui sont sans défaut de finition, 95% réussissent le test de solidité ;
- 2 % des jouets ne satisfont à aucun des deux contrôles.

On prend au hasard un jouet parmi les jouets produits. On note :

- F l'événement : « *le jouet est sans défaut de finition* » ;
- S l'événement : « *le jouet réussit le test de solidité* ».

1) Construction d'un arbre pondéré associé a cette situation.
   a) Traduire les données de l'énoncé en utilisant les notations des probabilités.
   b) Démontrer que $p_{\overline{F}}(\overline{S}) = \dfrac{1}{4}$.
   c) Construire l'arbre pondéré correspondant à cette situation.

2) Calcul de probabilités.
   a) Démontrer que $p(S) = 0{,}934$.
   b) Un jouet a réussi le test de solidité. Calculer la probabilité qu'il soit sans défaut de finition. (On donnera le résultat arrondi au millième.)

3) Etude d'une variable aléatoire B.
   Les jouets ayant satisfait aux deux contrôles rapportent un bénéfice de 10 €, ceux qui n'ont pas satisfait au test de solidité sont mis au rebut, les autres jouets rapportent un bénéfice de 5€.
   On désigne par B la variable aléatoire qui associe à chaque jouet le bénéfice rapporté.
   a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire B.
   b) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire B.

4) Etude d'une nouvelle variable aléatoire.
   On prélève au hasard dans la production de l'entreprise un lot de 10 jouets.
   On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de jouets de ce lot subissant avec succès le test de solidité. On suppose que la quantité fabriquée est suffisamment importante pour que la constitution de ce lot puisse être assimilée à un tirage avec remise.

   Calculer la probabilité qu'au moins 8 jouets de ce lot subissent avec succès le test de solidité.

Exercice 4 (*7 points*)
Commun à tous les candidats

On désigne par a un réel strictement positif et différent de 1.
On se propose de rechercher, dans l'intervalle $]0;+\infty[$, les solutions de l'équation $E_a\ :\ x^a = a^x$.

I) Etude de quelques cas particuliers

1) Vérifier que les nombres 2 et 4 sont solutions de l'équation E_2.
2) Vérifier que le nombre a est toujours solution de l'équation E_a.
3) On se propose de démontrer que e est la seule solution de l'équation E_e.
On note h la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $h(x) = x - e\ln x$.
   a) **Question de cours :**
   On rappelle que lorsque t tend vers $+\infty$, alors $\dfrac{e^t}{t}$ tend vers $+\infty$.
   Démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.
   b) Déterminer les limites de h en 0 et $+\infty$.
   c) Etudier les variations de h sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
   d) Dresser le tableau des variations de h et conclure quant aux solutions de l'équation E_e.

II) Résolution de l'équation E_a.

1) Soit x un réel strictement positif. Montrer que x est solution de l'équation E_a si et seulement si x est solution de l'équation : $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{\ln a}{a}$.
2) On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.
   a) Déterminer les limites de f en 0 et $+\infty$. Donner une interprétation graphique de ces deux limites.
   b) Etudier les variations de f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
   c) Dresser le tableau des variations de la fonction f.
   d) Tracer la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$.
   (Unité : 2 cm).

3) Justifier à l'aide des résultats précédents les propositions (P_1) et (P_2) suivantes :

(P_1) : si $a \in]0;1]$ alors E_a admet l'unique solution a ;

(P_2) : si $a \in]1;e[\cup]e;+\infty[$ alors E_a admet deux solutions a et b, l'une appartenant à l'intervalle $]1;e[$ et l'autre appartenant à l'intervalle $]e;+\infty[$.