

Exercice 1

1. **Modélisation de l'expérience aléatoire** : l'univers Ω est l'ensemble des combinaisons (choix non ordonnés et sans répétition) de trois éléments distincts pris dans l'ensemble des huit boules $\{N_1, N_2, N_3, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5\}$.

On choisit la probabilité équirépartie sur cet univers Ω .

On sait que $\text{Card}(\Omega) = \binom{8}{3} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3!} = 56$

(a) Cette probabilité est $\frac{\binom{3}{3}}{56} = \frac{1}{56}$. Réponse **A**.

(b) La probabilité de tirer 3 boules rouges est $\frac{\binom{5}{3}}{56} = \frac{10}{56}$. La probabilité de tirer 3 boules de la même couleur est alors $\frac{1}{56} + \frac{10}{56} = \frac{11}{56}$. Réponse **A**.

2. On répète 5 fois, dans des conditions identiques et indépendantes, la même épreuve de Bernoulli qui consiste à tirer une boule de l'urne. Les issues contraires de cette épreuve sont : «la boule tirée est noire» (succès de probabilité $p = 3/8$) et «la boule tirée est rouge» (échec de probabilité $q = 1 - p = 5/8$).

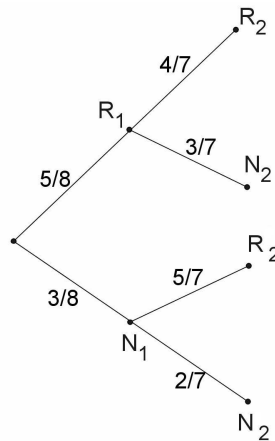
Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules noires obtenues au cours de ces 5 épreuves. On sait alors que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(5, 3/8)$

Pour tout entier k compris entre 0 et 5, $P(X = k) = \binom{5}{k} \left(\frac{3}{8}\right)^k \left(\frac{5}{8}\right)^{5-k}$

(a) $P(X = 5) = \left(\frac{3}{8}\right)^5$. Réponse **B**.

(b) $P(X = 2) = \binom{5}{2} \left(\frac{3}{8}\right)^2 \left(\frac{5}{8}\right)^3$. Réponse **C**.

3. Construisons l'arbre pondéré associé à cette troisième expérience aléatoire.



(a) $P_{R_1}(R_2)$ est la probabilité de tirer une boule rouge dans une urne contenant 7 boules : 4 rouges et 3 noires. Donc $P_{R_1}(R_2) = \frac{4}{7}$. Réponse **B**.

(b) $P(R_1 \cap N_2) = P(R_1) \times P_{R_1}(N_2) = \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{15}{56}$. Réponse **C**.

(c) D'après la formule des probabilités totales :
 $P(R_2) = P(R_1 \cap R_2) + P(N_1 \cap R_2) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{20 + 15}{56} = \frac{35}{56} = \frac{5}{8}$
 Réponse **A**.

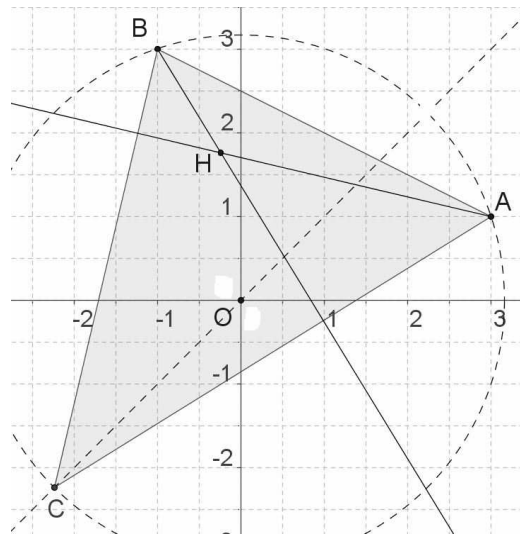
(d) $P_{N_2}(R_1) = \frac{P(R_1 \cap N_2)}{P(N_2)} = \frac{P(R_1 \cap N_2)}{1 - P(R_2)} = \frac{15/56}{3/8} = \frac{5}{7}$. Réponse **C**.

On pose $z = x + iy$ avec x et y réels. Alors $\Re(z) = x$ et $\Im(z) = y$.

- $\bar{z} = -z \Leftrightarrow x - iy = -(x + iy) \Leftrightarrow x - iy = -x - iy \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$
 $\Leftrightarrow \Re(z) = 0 \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$ où $i\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des imaginaires purs.
- $\bar{z} = z \Leftrightarrow x - iy = x + iy \Leftrightarrow -2iy = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow \Im(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.
- Par définition, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ d'où $|z|^2 = x^2 + y^2$
 De plus, $z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2$
 Par conséquent $z\bar{z} = |z|^2$

Partie II

- $OA = |a| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$; $OB = |b| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$;
 $OC = |c| = \sqrt{5 + 5} = \sqrt{10}$
 Donc $OA = OB = OC$ ce qui signifie que O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC .
- Le point H a pour affixe $h = (2 - \sqrt{5}) + (4 - \sqrt{5})i$
 Les points A et B se placent aisément. Le point C appartient au cercle de centre O , de rayon OA et à la droite d'équation réduite $y = x$. Pour placer le point H , on utilise la calculatrice et on obtient $h \approx -0,24 + i \times 1,76$



On « voit » que H est l'orthocentre de ABC

Partie III

- O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC
 ssi $OA = OB = OC$ ssi $OA^2 = OB^2 = OC^2$
 ssi $|a|^2 = |b|^2 = |c|^2$
 ssi $a\bar{a} = b\bar{b} = c\bar{c}$ (d'après le résultat établi en I-3.)
- On pose $w = \bar{b}c - b\bar{c}$
 - En utilisant les propriétés de la conjugaison (pour tous complexes z et z' , $\overline{z - z'} = \bar{z} - \bar{z}'$; $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'$ et $\overline{\bar{z}} = z$), on obtient :
 $\bar{w} = \overline{\bar{b}c - b\bar{c}} = \overline{\bar{b}c} - \overline{b\bar{c}} = b\bar{c} - \bar{b}c = -(\bar{b}c - b\bar{c}) = -w$
 On en déduit que w est imaginaire pur.
 - $(b+c)(\bar{b}-\bar{c}) = b\bar{b} - b\bar{c} + c\bar{b} - c\bar{c} = (b\bar{b} - c\bar{c}) + (\bar{b}c - b\bar{c})$
 Or $b\bar{b} = c\bar{c}$ d'après III-1. Donc $(b+c)(\bar{b}-\bar{c}) = \bar{b}c - b\bar{c} = w$
 $\bullet \frac{w}{|b-c|^2} = \frac{(b+c)(\bar{b}-\bar{c})}{(b-c)(\bar{b}-\bar{c})} = \frac{(b+c)(\bar{b}-\bar{c})}{(b-c)(\bar{b}-\bar{c})} = \frac{b+c}{b-c}$
 - On sait que w est imaginaire pur et que $\frac{1}{|b-c|^2}$ est un nombre réel (strictement positif).
 Il s'ensuit que $\frac{1}{|b-c|^2} \times w$ est un imaginaire pur
 c à d. que $\frac{b+c}{b-c}$ est un imaginaire pur

(a) Le vecteur \overrightarrow{AH} a pour affixe $z_{\overrightarrow{AH}} = h - a = b + c$

Le vecteur \overrightarrow{CB} a pour affixe $z_{\overrightarrow{CB}} = b - c$

(b) $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AH}) = (\vec{u}, \overrightarrow{AH}) - (\vec{u}, \overrightarrow{CB}) = \arg(z_{\overrightarrow{AH}}) - \arg(z_{\overrightarrow{CB}})$

$$= \arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{AH}}}{z_{\overrightarrow{CB}}}\right) = \arg\left(\frac{b+c}{b-c}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

car $\frac{b+c}{b-c}$ est un imaginaire pur **non nul**.

(c) L'énoncé sous-entend de plus que $a + c \neq 0$ (ou que ABC n'est pas rectangle en B). D'après la question précédente, $(CB) \perp (AH)$ et $(CA) \perp (BH)$.

Le point H appartient donc à deux hauteurs du triangle ABC .

En conséquence H est l'orthocentre du triangle ABC .

Exercice 2 (spécialité)

Partie I

On note s la similitude plane directe d'écriture complexe $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C} \setminus \{0; 1\}$.

Un point M d'affixe z est invariant par s ssi $z = az + b$ ce qui équivaut à $z - az = b$ c.à.d. $z = \frac{b}{1-a}$

s admet donc un unique point invariant Ω appelé centre de s et d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$

Partie II

1. g admet pour écriture complexe $z' = az + b$ avec $a = i\sqrt{2}$ et $b = 2i\sqrt{2} - 2$.
 g est la similitude directe de centre le point Ω d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{2i\sqrt{2}-2}{1-i\sqrt{2}}$
 $= \frac{-2(1-i\sqrt{2})}{1-i\sqrt{2}} = -2$, de rapport $|a| = \sqrt{2}$ et d'angle $\arg(a) = \frac{\pi}{2}$
2. $M(z) \xrightarrow{s} M_1(z_1 = \bar{z}) \xrightarrow{g} M'(z' = i\sqrt{2}z_1 + 2i\sqrt{2} - 2)$
 Nous avons $f = g \circ s$ où s est la transformation d'écriture complexe $z' = \bar{z}$.
 s est donc la réflexion d'axe (Ox) .

Partie III

1. Soit M un point d'affixe $z = x + iy$ avec x et y réels.
 $M = f(M) \Leftrightarrow z = i\sqrt{2}\bar{z} + 2i\sqrt{2} - 2 \Leftrightarrow x + iy = i\sqrt{2}(x - iy) + 2i\sqrt{2} - 2$
 $\Leftrightarrow x + iy = y\sqrt{2} - 2 + i(x\sqrt{2} + 2\sqrt{2}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = y\sqrt{2} - 2 \\ y = x\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x = (2x+4) - 2 \\ y = x\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2x+2 \\ y = x\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow z = -2$
 Ainsi le point $\Omega(-2)$ est l'unique point invariant par f
2. Soit N un point de \mathcal{D} . Alors il existe un réel x tel que N ait pour affixe $n = x + i(x+2)$
 L'image de N par f est le point $f(N)$ d'affixe
 $n' = i\sqrt{2}\bar{n} + 2i\sqrt{2} - 2 = i\sqrt{2}(x - ix - 2i) + 2i\sqrt{2} - 2 = ix\sqrt{2} + x\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2} - 2$
 $= \underbrace{(x\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 2)}_{x'} + i \underbrace{(x\sqrt{2} + 2\sqrt{2})}_{y'}$
 On constate que $y' = x' + 2$. Il en résulte que $f(N)$ appartient à \mathcal{D} .
3. σ est la réflexion d'axe \mathcal{D} et $k = f \circ \sigma$

- (a) En tant que similitude indirecte, σ admet une écriture complexe du type $z' = a\bar{z} + b$. Or les points $A(-2)$ et $B(2i)$ sont invariants par σ .

$$\text{D'où le système d'égalités : } \begin{cases} -2 = -2a + b \\ 2i = -2ia + b \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} b = 2a - 2 \\ 2i = -2ia + b \end{cases}$$

$$\text{On en déduit que } 2i = -2ia + 2a - 2 \Rightarrow 2 + 2i = a(2 - 2i) \Rightarrow a = \frac{1+i}{1-i}$$

$$\text{D'où } a = \frac{(1+i)^2}{2} = i. \text{ Puis } b = 2a - 2 = -2 + 2i. \text{ Ainsi}$$

$$\boxed{\sigma : z' = i\bar{z} - 2 + 2i}$$

- (b) Déterminons l'écriture complexe de $k = f \circ \sigma$.

$$M(z) \xrightarrow{\sigma} M_1(z_1) \xrightarrow{f} M'(z')$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = i\bar{z} - 2 + 2i \\ z' = i\sqrt{2}\bar{z}_1 + 2i\sqrt{2} - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = i\bar{z} - 2 + 2i \\ z' = i\sqrt{2}(i\bar{z} - 2 + 2i) + 2i\sqrt{2} - 2 \end{cases}$$

$$\text{Ainsi } k \text{ admet pour écriture complexe } z' = i\sqrt{2}(-iz - 2 - 2i) + 2i\sqrt{2} - 2$$

$$\text{Finalement l'écriture complexe de } k \text{ est } \boxed{z' = \sqrt{2}z + 2\sqrt{2} - 2}$$

- (c) On reconnaît l'écriture complexe de l'homothétie de centre le point d'affixe $\frac{2\sqrt{2}-2}{1-\sqrt{2}} = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{1-\sqrt{2}} = -2$ (c'est le point Ω) et de rapport $\sqrt{2}$

4. $k = f \circ \sigma$ d'où $k \circ \sigma = (f \circ \sigma) \circ \sigma$ d'où $k \circ \sigma = f \circ (\sigma \circ \sigma)$

$$\text{Or on sait que } \sigma \circ \sigma = \text{Id. Ainsi } \boxed{f = k \circ \sigma}$$

1. Pour tout réel x de I , $f'(x) \neq 0$. Alors la droite T n'est pas parallèle à l'axe $(O; \vec{i})$. Donc T coupe l'axe $(O; \vec{i})$ en un unique point H dont l'abscisse X_T est la solution de l'équation d'inconnue X : $f'(x)(X - x) + f(x) = 0$

$$f'(x)(X - x) + f(x) = 0 \iff f'(x)(X - x) = -f(x) \iff X - x = -\frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$\iff X = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad \text{Ainsi}$$

$$X_T = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

2. T admet une équation réduite du type $Y = aX + b$. Alors la droite T n'est pas parallèle à l'axe $(O; \vec{j})$. Donc T coupe l'axe $(O; \vec{j})$ en un unique point K dont l'ordonnée Y_T vérifie $Y_T = f'(x)(0 - x) + f(x)$ $Y_T = f(x) - x f'(x)$

Partie II

Soit $k \in \mathbb{R}^*$, k fixé et f une fonction dérivable sur un \mathbb{R} telle que
 $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) \neq 0$.

1. f vérifie la propriété 1

ssi $\forall x \in \mathbb{R}, x - X_T = k$

ssi $\forall x \in \mathbb{R}, x - \left(x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right) = k$

ssi $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{f(x)}{f'(x)} = k$

ssi $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = k f'(x)$

ssi $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{k} f(x)$

ssi f est une solution de l'équation différentielle $y' = \frac{1}{k} y$

2. On sait que les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{\frac{1}{k}x}$ où λ désigne une constante réelle.

On sait aussi que l'équation différentielle $y' = 2y$ admet une unique solution satisfaisant à la condition initiale $y(0) = 1$. Cette solution est la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \lambda e^{2x}$ où λ vérifie $\lambda e^{2 \times 0} = 1$. Donc $\lambda = 1$ puis

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{2x}$

Partie III

Soit $k \in \mathbb{R}^*$, k fixé et f une fonction dérivable sur $I =]0, +\infty[$ telle que
 $\forall x \in I, f'(x) \neq 0$.

1. f vérifie la propriété 2

ssi $\forall x \in I, f(x) - Y_T = k$

ssi $\forall x \in I, f(x) - (f(x) - x f'(x)) = k$

ssi $\forall x \in I, x f'(x) = k$

ssi $\forall x \in I, f'(x) = \frac{k}{x}$

ssi f est une solution sur I de l'équation différentielle $y' = \frac{k}{x}$

2. Les solutions de cette équation différentielle sont les primitives sur I de la

fonction $u : x \mapsto k \times \frac{1}{x}$. Ces solutions sont donc les fonctions $x \mapsto k \ln x + \lambda$ où λ désigne une constante réelle. On sait de plus qu'une fonction u continue sur un intervalle I admet une seule primitive sur I qui prend une **valeur donnée** en un **point donné**. Dès lors il existe une unique solution de $y' = \frac{1/2}{x}$ satisfaisant à la condition $y(1) = 0$.

Cette solution est la fonction f définie sur I par $f(x) = \frac{1}{2} \ln x + \lambda$ où λ vérifie $\frac{1}{2} \ln 1 + \lambda = 0$. Donc $\lambda = 0$ puis

$\forall x > 0, f(x) = \frac{1}{2} \ln x$

Exercice 4

Partie I

1. (E) : $e^x = \frac{1}{x} \iff x e^x = 1 \iff x = e^{-x} \iff x - e^{-x} = 0 \iff f(x) = 0$

2. (a) f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel $x, f'(x) = 1 + e^{-x}$. Or pour tout réel $x, e^{-x} > 0$. Donc pour tout réel $x, f'(x) > 1 > 0$.

Ainsi la fonction f est strictement croissante sur \mathbb{R}

(b) • $f(0) = -1$. Alors $x < 0 \implies f(x) < f(0) \implies f(x) < -1 \implies f(x) < 0$

L'équation $f(x) = 0$ n'admet aucune solution dans l'intervalle $]-\infty, 0[$.

• $f(1) = 1 - \frac{1}{e}$. Alors $x > 1 \implies f(x) > f(1) \implies f(x) > 1 - \frac{1}{e} \implies f(x) > 0$

• La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[0, 1]$. Donc d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, f réalise une bijection de $[0, 1]$ sur l'intervalle image de $[0, 1]$ par f à savoir

$$f([0, 1]) = [f(0), f(1)] = \left[-1, 1 - \frac{1}{e}\right]$$

Puisque $0 \in f([0, 1])$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0, 1]$.

- (c) • $f\left(\frac{1}{2}\right) \approx -0,1$ à 10^{-1} près par excès.
 • $f(1) \approx 0,6$ à 10^{-1} près par défaut.

• Donc $f(1/2) \leq -0,1 < 0 < 0,6 \leq f(1)$ avec $0 = f(\alpha)$

d'où $f\left(\frac{1}{2}\right) < f(\alpha) < f(1)$

Il en résulte par croissance de f sur \mathbb{R} que $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$

- (d) $x \in [0, \alpha] \implies f(0) \leq f(x) \leq f(\alpha) \implies -1 \leq f(x) \leq 0$ car $f(\alpha) = 0$
 Ainsi f est négative sur $[0, \alpha]$.

Partie II

1. $g(x) = x \iff \frac{1+x}{1+e^x} = x \iff 1+x = x(1+e^x) \iff 1+x = x + xe^x$
 $\iff 1 = xe^x \iff e^x = \frac{1}{x}$

2. On a vu en I-2.(b) que α était l'unique solution dans $[0, 1]$ de l'équation $f(x) = 0$ qui est équivalente à $g(x) = x$.
 En conséquence α est l'unique solution dans $[0, 1]$ de l'équation $g(x) = x$.

3. La fonction g est dérivable sur $[0, 1]$ et pour tout x de $[0, 1]$,

$$g'(x) = \frac{1(1+e^x) - (1+x)e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{1+e^x - e^x - xe^x}{(1+e^x)^2} = \frac{1 - xe^x}{(1+e^x)^2} = \frac{-e^x(x - e^{-x})}{(1+e^x)^2}$$

Donc pour tout x de $[0, 1]$, $g'(x) = \frac{-e^x f(x)}{(1+e^x)^2}$

Puisque $\frac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0$, $g'(x)$ et $f(x)$ sont de signes contraires.

Donc, d'après I - 2 (d), f étant positive sur $[0, \alpha]$, pour tout x de $[0, \alpha]$, $g'(x) \geq 0$.
 Ainsi la fonction g est croissante sur $[0, \alpha]$.

Partie III

1. Pour tout entier naturel n , notons \mathcal{P}_n la propriété : « $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$ »

• **Initialisation** : vérifions la propriété au rang 0.

$u_0 = 0$ et $u_1 = g(0) = 1/2$. Or d'après I-2.(c), $\frac{1}{2} \leq \alpha$. Donc $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq \alpha$.

• **Hérédité** : soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons la propriété \mathcal{P}_k vraie. Démontrons alors, sous cette hypothèse, que \mathcal{P}_{k+1} est vraie.

On sait que g est croissante sur $[0, \alpha]$.

Or, d'après l'hypothèse de récurrence, $0 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq \alpha$

Donc $g(0) \leq g(u_k) \leq g(u_{k+1}) \leq g(\alpha)$

avec $g(0) = 1/2$; $g(u_k) = u_{k+1}$; $g(u_{k+1}) = u_{k+2}$ et $g(\alpha) = \alpha$

Par conséquent $0 \leq \frac{1}{2} \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq \alpha$ et \mathcal{P}_{k+1} est vraie.

• **Conclusion** : le principe de récurrence permet de conclure que pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$

2. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante

Cette suite est également majorée par α . Il en résulte d'après le théorème de convergence monotone, que la suite

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente

3. Notons ℓ la limite de la suite (u_n) . Alors il est clair que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell$

Puisque $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq \alpha$, on obtient par passage à la limite dans cet encadrement : $0 \leq \ell \leq \alpha$. En particulier

D'où $\lim_{x \rightarrow \ell} g(x) = g(\ell)$. On en déduit par composition que $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(u_n) = g(\ell)$

Or par définition de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $g(u_n) = u_{n+1}$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = g(\ell)$. Par unicité de la limite d'une suite, on en déduit que $g(\ell) = \ell$ autrement dit ℓ est une solution dans $[0, 1]$ de l'équation $g(x) = x$.

Or cette équation admet α pour unique solution. Donc $\ell = \alpha$

4. La calculatrice fournit $u_4 \approx 0,567143$ à 10^{-6} près par défaut (valeur arrondie).