

**Exercice 1**

1. **Modélisation de l'expérience aléatoire** : l'univers  $\Omega$  est l'ensemble des combinaisons (choix non ordonnés et sans répétition) de trois éléments distincts pris dans l'ensemble des huit boules  $\{N1, N2, N3, R1, R2, R3, R4, R5\}$ .

On choisit la probabilité équirépartie sur cet univers  $\Omega$ .

On sait que  $\text{Card}(\Omega) = \binom{8}{3} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3!} = 56$

(a) Cette probabilité est  $\frac{\binom{3}{3}}{56} = \frac{1}{56}$ . Réponse **A**.

(b) La probabilité de tirer 3 boules rouges est  $\frac{\binom{5}{3}}{56} = \frac{10}{56}$ . La probabilité de tirer 3 boules de la même couleur est alors  $\frac{1}{56} + \frac{10}{56} = \frac{11}{56}$ . Réponse **A**.

2. On répète 5 fois, dans des conditions identiques et indépendantes, la même épreuve de Bernoulli qui consiste à tirer une boule de l'urne. Les issues contraires de cette épreuve sont : «la boule tirée est noire» (succès de probabilité  $p = 3/8$ ) et «la boule tirée est rouge» (échec de probabilité  $q = 1 - p = 5/8$ ).

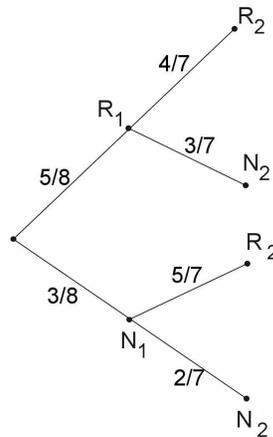
Soit  $X$  la variable aléatoire qui compte le nombre de boules noires obtenues au cours de ces 5 épreuves. On sait alors que  $X$  suit la loi binomiale  $\mathcal{B}(5, 3/8)$

Pour tout entier  $k$  compris entre 0 et 5,  $P(X = k) = \binom{5}{k} \left(\frac{3}{8}\right)^k \left(\frac{5}{8}\right)^{5-k}$

(a)  $P(X = 5) = \left(\frac{3}{8}\right)^5$ . Réponse **B**.

(b)  $P(X = 2) = \binom{5}{2} \left(\frac{3}{8}\right)^2 \left(\frac{5}{8}\right)^3$ . Réponse **C**.

3. Construisons l'arbre pondéré associé à cette troisième expérience aléatoire.



(a)  $P_{R_1}(R_2)$  est la probabilité de tirer une boule rouge dans une urne contenant 7 boules : 4 rouges et 3 noires. Donc  $P_{R_1}(R_2) = \frac{4}{7}$ . Réponse **B**.

(b)  $P(R_1 \cap N_2) = P(R_1) \times P_{R_1}(N_2) = \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{15}{56}$ . Réponse **C**.

(c) D'après la formule des probabilités totales :  
 $P(R_2) = P(R_1 \cap R_2) + P(N_1 \cap R_2) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{20 + 15}{56} = \frac{35}{56} = \frac{5}{8}$   
 Réponse **A**.

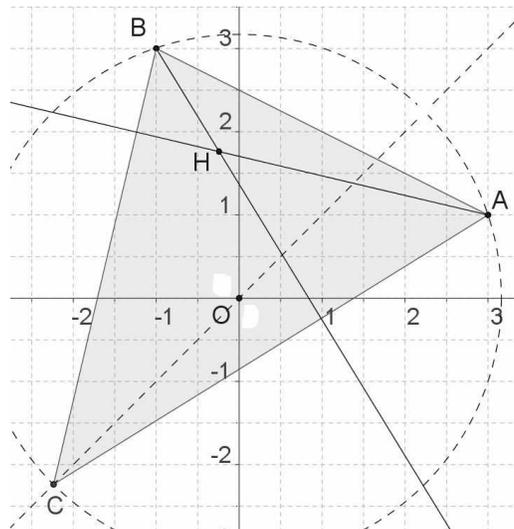
(d)  $P_{N_2}(R_1) = \frac{P(R_1 \cap N_2)}{P(N_2)} = \frac{P(R_1 \cap N_2)}{1 - P(R_2)} = \frac{15/56}{3/8} = \frac{5}{7}$ . Réponse **C**.

On pose  $z = x + iy$  avec  $x$  et  $y$  réels. Alors  $\Re(z) = x$  et  $\Im(z) = y$ .

1.  $\bar{z} = -z \Leftrightarrow x - iy = -(x + iy) \Leftrightarrow x - iy = -x - iy \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$   
 $\Leftrightarrow \Re(z) = 0 \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$  où  $i\mathbb{R}$  désigne l'ensemble des imaginaires purs.
2.  $\bar{z} = z \Leftrightarrow x - iy = x + iy \Leftrightarrow -2iy = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow \Im(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ .
3. Par définition,  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  d'où  $|z|^2 = x^2 + y^2$   
 De plus,  $z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2$   
 Par conséquent  $z\bar{z} = |z|^2$

**Partie II**

1.  $OA = |a| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$  ;  $OB = |b| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$  ;  
 $OC = |c| = \sqrt{5 + 5} = \sqrt{10}$   
 Donc  $OA = OB = OC$  ce qui signifie que  $O$  est le centre du cercle circonscrit au triangle  $ABC$ .
2. Le point  $H$  a pour affixe  $h = (2 - \sqrt{5}) + (4 - \sqrt{5})i$   
 Les points  $A$  et  $B$  se placent aisément. Le point  $C$  appartient au cercle de centre  $O$ , de rayon  $OA$  et à la droite d'équation réduite  $y = x$ . Pour placer le point  $H$ , on utilise la calculatrice et on obtient  $h \approx -0,24 + i \times 1,76$



On « voit » que  $H$  est l'orthocentre de  $ABC$

**Partie III**

1.  $O$  est le centre du cercle circonscrit au triangle  $ABC$   
 ssi  $OA = OB = OC$  ssi  $OA^2 = OB^2 = OC^2$   
 ssi  $|a|^2 = |b|^2 = |c|^2$   
 ssi  $a\bar{a} = b\bar{b} = c\bar{c}$  (d'après le résultat établi en I-3.)
2. On pose  $w = \bar{b}c - b\bar{c}$ 
  - (a) En utilisant les propriétés de la conjugaison (pour tous complexes  $z$  et  $z'$ ,  $\overline{z - z'} = \bar{z} - \bar{z}'$  ;  $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'$  et  $\overline{\bar{z}} = z$ ), on obtient :  
 $\bar{w} = \overline{\bar{b}c - b\bar{c}} = \overline{\bar{b}c} - \overline{b\bar{c}} = b\bar{c} - \bar{b}c = -(\bar{b}c - b\bar{c}) = -w$   
 On en déduit que  $w$  est imaginaire pur.
  - (b)  $(b + c)(\bar{b} - \bar{c}) = b\bar{b} - b\bar{c} + c\bar{b} - c\bar{c} = (b\bar{b} - c\bar{c}) + (\bar{b}c - b\bar{c})$   
 Or  $b\bar{b} = c\bar{c}$  d'après III-1. Donc  $(b + c)(\bar{b} - \bar{c}) = \bar{b}c - b\bar{c} = w$   
 $\bullet \frac{w}{|b - c|^2} = \frac{(b + c)(\bar{b} - \bar{c})}{(b - c)(\bar{b} - \bar{c})} = \frac{(b + c)(\bar{b} - \bar{c})}{(b - c)(\bar{b} - \bar{c})} = \frac{b + c}{b - c}$
  - (c) On sait que  $w$  est imaginaire pur et que  $\frac{1}{|b - c|^2}$  est un nombre réel (strictement positif).  
 Il s'ensuit que  $\frac{1}{|b - c|^2} \times w$  est un imaginaire pur  
 c à d. que  $\frac{b + c}{b - c}$  est un imaginaire pur

(a) Le vecteur  $\overrightarrow{AH}$  a pour affixe  $z_{\overrightarrow{AH}} = h - a = b + c$

Le vecteur  $\overrightarrow{CB}$  a pour affixe  $z_{\overrightarrow{CB}} = b - c$

(b)  $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AH}) = (\vec{u}, \overrightarrow{AH}) - (\vec{u}, \overrightarrow{CB}) = \arg(z_{\overrightarrow{AH}}) - \arg(z_{\overrightarrow{CB}})$

$$= \arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{AH}}}{z_{\overrightarrow{CB}}}\right) = \arg\left(\frac{b+c}{b-c}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

car  $\frac{b+c}{b-c}$  est un imaginaire pur **non nul**.

(c) L'énoncé sous-entend de plus que  $a + c \neq 0$  (ou que  $ABC$  n'est pas rectangle en  $B$ ). D'après la question précédente,  $(CB) \perp (AH)$  et  $(CA) \perp (BH)$ .

Le point  $H$  appartient donc à deux hauteurs du triangle  $ABC$ .

En conséquence  $H$  est l'orthocentre du triangle  $ABC$ .

**Exercice 2** (spécialité)

**Partie I**

On note  $s$  la similitude plane directe d'écriture complexe  $z' = az + b$  où  $a \in \mathbb{C} \setminus \{0; 1\}$ .

Un point  $M$  d'affixe  $z$  est invariant par  $s$  ssi  $z = az + b$  ce qui équivaut à  $z - az = b$  c.à.d.  $z = \frac{b}{1-a}$

$s$  admet donc un unique point invariant  $\Omega$  appelé centre de  $s$  et d'affixe  $\omega = \frac{b}{1-a}$

## Partie II

1.  $g$  admet pour écriture complexe  $z' = az + b$  avec  $a = i\sqrt{2}$  et  $b = 2i\sqrt{2} - 2$ .  
 $g$  est la similitude directe de centre le point  $\Omega$  d'affixe  $\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{2i\sqrt{2}-2}{1-i\sqrt{2}}$   
 $= \frac{-2(1-i\sqrt{2})}{1-i\sqrt{2}} = -2$ , de rapport  $|a| = \sqrt{2}$  et d'angle  $\arg(a) = \frac{\pi}{2}$
2.  $M(z) \xrightarrow{s} M_1(z_1 = \bar{z}) \xrightarrow{g} M'(z' = i\sqrt{2}z_1 + 2i\sqrt{2} - 2)$   
 Nous avons  $f = g \circ s$  où  $s$  est la transformation d'écriture complexe  $z' = \bar{z}$ .  
 $s$  est donc la réflexion d'axe  $(Ox)$ .

## Partie III

1. Soit  $M$  un point d'affixe  $z = x + iy$  avec  $x$  et  $y$  réels.  
 $M = f(M) \Leftrightarrow z = i\sqrt{2}\bar{z} + 2i\sqrt{2} - 2 \Leftrightarrow x + iy = i\sqrt{2}(x - iy) + 2i\sqrt{2} - 2$   
 $\Leftrightarrow x + iy = y\sqrt{2} - 2 + i(x\sqrt{2} + 2\sqrt{2}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = y\sqrt{2} - 2 \\ y = x\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \end{cases}$   
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x = (2x+4) - 2 \\ y = x\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2x+2 \\ y = x\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow z = -2$   
 Ainsi le point  $\Omega(-2)$  est l'unique point invariant par  $f$
2. Soit  $N$  un point de  $\mathcal{D}$ . Alors il existe un réel  $x$  tel que  $N$  ait pour affixe  $n = x + i(x+2)$   
 L'image de  $N$  par  $f$  est le point  $f(N)$  d'affixe  
 $n' = i\sqrt{2}\bar{n} + 2i\sqrt{2} - 2 = i\sqrt{2}(x - ix - 2i) + 2i\sqrt{2} - 2 = ix\sqrt{2} + x\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2} - 2$   
 $= \underbrace{(x\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 2)}_{x'} + i \underbrace{(x\sqrt{2} + 2\sqrt{2})}_{y'}$   
 On constate que  $y' = x' + 2$ . Il en résulte que  $f(N)$  appartient à  $\mathcal{D}$ .
3.  $\sigma$  est la réflexion d'axe  $\mathcal{D}$  et  $k = f \circ \sigma$

- (a) En tant que similitude indirecte,  $\sigma$  admet une écriture complexe du type  $z' = a\bar{z} + b$ . Or les points  $A(-2)$  et  $B(2i)$  sont invariants par  $\sigma$ .

$$\text{D'où le système d'égalités : } \begin{cases} -2 = -2a + b \\ 2i = -2ia + b \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} b = 2a - 2 \\ 2i = -2ia + b \end{cases}$$

$$\text{On en déduit que } 2i = -2ia + 2a - 2 \Rightarrow 2 + 2i = a(2 - 2i) \Rightarrow a = \frac{1+i}{1-i}$$

$$\text{D'où } a = \frac{(1+i)^2}{2} = i. \text{ Puis } b = 2a - 2 = -2 + 2i. \text{ Ainsi}$$

$$\boxed{\sigma : z' = i\bar{z} - 2 + 2i}$$

- (b) Déterminons l'écriture complexe de  $k = f \circ \sigma$ .

$$M(z) \xrightarrow{\sigma} M_1(z_1) \xrightarrow{f} M'(z')$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = i\bar{z} - 2 + 2i \\ z' = i\sqrt{2}\bar{z}_1 + 2i\sqrt{2} - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = i\bar{z} - 2 + 2i \\ z' = i\sqrt{2}(i\bar{z} - 2 + 2i) + 2i\sqrt{2} - 2 \end{cases}$$

$$\text{Ainsi } k \text{ admet pour écriture complexe } z' = i\sqrt{2}(-iz - 2 - 2i) + 2i\sqrt{2} - 2$$

$$\text{Finalement l'écriture complexe de } k \text{ est } \boxed{z' = \sqrt{2}z + 2\sqrt{2} - 2}$$

- (c) On reconnaît l'écriture complexe de l'homothétie de centre le point d'affixe  $\frac{2\sqrt{2}-2}{1-\sqrt{2}} = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{1-\sqrt{2}} = -2$  (c'est le point  $\Omega$ ) et de rapport  $\sqrt{2}$

4.  $k = f \circ \sigma$  d'où  $k \circ \sigma = (f \circ \sigma) \circ \sigma$  d'où  $k \circ \sigma = f \circ (\sigma \circ \sigma)$

$$\text{Or on sait que } \sigma \circ \sigma = \text{Id. Ainsi } \boxed{f = k \circ \sigma}$$

1. Pour tout réel  $x$  de  $I$ ,  $f'(x) \neq 0$ . Alors la droite  $T$  n'est pas parallèle à l'axe  $(O; \vec{i})$ . Donc  $T$  coupe l'axe  $(O; \vec{i})$  en un unique point  $H$  dont l'abscisse  $X_T$  est la solution de l'équation d'inconnue  $X$  :  $f'(x)(X - x) + f(x) = 0$

$$f'(x)(X - x) + f(x) = 0 \iff f'(x)(X - x) = -f(x) \iff X - x = -\frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$\iff X = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad \text{Ainsi}$$

$$X_T = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

2.  $T$  admet une équation réduite du type  $Y = aX + b$ . Alors la droite  $T$  n'est pas parallèle à l'axe  $(O; \vec{j})$ . Donc  $T$  coupe l'axe  $(O; \vec{j})$  en un unique point  $K$  dont l'ordonnée  $Y_T$  vérifie  $Y_T = f'(x)(0 - x) + f(x)$   $Y_T = f(x) - x f'(x)$

**Partie II**

Soit  $k \in \mathbb{R}^*$ ,  $k$  fixé et  $f$  une fonction dérivable sur un  $\mathbb{R}$  telle que  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) \neq 0$ .

1.  $f$  vérifie la propriété 1

ssi  $\forall x \in \mathbb{R}, x - X_T = k$

ssi  $\forall x \in \mathbb{R}, x - \left(x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right) = k$

ssi  $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{f(x)}{f'(x)} = k$

ssi  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = k f'(x)$

ssi  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{k} f(x)$

ssi  $f$  est une solution de l'équation différentielle  $y' = \frac{1}{k} y$

2. On sait que les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions  $x \mapsto \lambda e^{\frac{1}{k}x}$  où  $\lambda$  désigne une constante réelle.

On sait aussi que l'équation différentielle  $y' = 2y$  admet une unique solution satisfaisant à la condition initiale  $y(0) = 1$ . Cette solution est la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \lambda e^{2x}$  où  $\lambda$  vérifie  $\lambda e^{2 \times 0} = 1$ . Donc  $\lambda = 1$  puis

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{2x}$

**Partie III**

Soit  $k \in \mathbb{R}^*$ ,  $k$  fixé et  $f$  une fonction dérivable sur  $I = ]0, +\infty[$  telle que  $\forall x \in I, f'(x) \neq 0$ .

1.  $f$  vérifie la propriété 2

ssi  $\forall x \in I, f(x) - Y_T = k$

ssi  $\forall x \in I, f(x) - (f(x) - x f'(x)) = k$

ssi  $\forall x \in I, x f'(x) = k$

ssi  $\forall x \in I, f'(x) = \frac{k}{x}$

ssi  $f$  est une solution sur  $I$  de l'équation différentielle  $y' = \frac{k}{x}$

2. Les solutions de cette équation différentielle sont les primitives sur  $I$  de la

fonction  $u : x \mapsto k \times \frac{1}{x}$ . Ces solutions sont donc les fonctions  $x \mapsto k \ln x + \lambda$  où  $\lambda$  désigne une constante réelle. On sait de plus qu'une fonction  $u$  continue sur un intervalle  $I$  admet une seule primitive sur  $I$  qui prend une **valeur donnée** en un **point donné**. Dès lors il existe une unique solution de  $y' = \frac{1/2}{x}$  satisfaisant à la condition  $y(1) = 0$ .

Cette solution est la fonction  $f$  définie sur  $I$  par  $f(x) = \frac{1}{2} \ln x + \lambda$  où  $\lambda$  vérifie  $\frac{1}{2} \ln 1 + \lambda = 0$ . Donc  $\lambda = 0$  puis

$\forall x > 0, f(x) = \frac{1}{2} \ln x$

**Exercice 4**

**Partie I**

1. (E) :  $e^x = \frac{1}{x} \iff x e^x = 1 \iff x = e^{-x} \iff x - e^{-x} = 0 \iff f(x) = 0$

2. (a)  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout réel  $x, f'(x) = 1 + e^{-x}$ . Or pour tout réel  $x, e^{-x} > 0$ . Donc pour tout réel  $x, f'(x) > 1 > 0$ .

Ainsi la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$

(b) •  $f(0) = -1$ . Alors  $x < 0 \implies f(x) < f(0) \implies f(x) < -1 \implies f(x) < 0$

L'équation  $f(x) = 0$  n'admet aucune solution dans l'intervalle  $]-\infty, 0[$ .

•  $f(1) = 1 - \frac{1}{e}$ . Alors  $x > 1 \implies f(x) > f(1) \implies f(x) > 1 - \frac{1}{e} \implies f(x) > 0$

• La fonction  $f$  est continue et strictement croissante sur l'intervalle  $[0, 1]$ . Donc d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires,  $f$  réalise une bijection de  $[0, 1]$  sur l'intervalle image de  $[0, 1]$  par  $f$  à savoir

$$f([0, 1]) = [f(0), f(1)] = \left[-1, 1 - \frac{1}{e}\right]$$

Puisque  $0 \in f([0, 1])$ , l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $[0, 1]$ .

- (c) •  $f\left(\frac{1}{2}\right) \approx -0,1$  à  $10^{-1}$  près par excès.  
 •  $f(1) \approx 0,6$  à  $10^{-1}$  près par défaut.

• Donc  $f(1/2) \leq -0,1 < 0 < 0,6 \leq f(1)$  avec  $0 = f(\alpha)$

d'où  $f\left(\frac{1}{2}\right) < f(\alpha) < f(1)$

Il en résulte par croissance de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  que  $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$

- (d)  $x \in [0, \alpha] \implies f(0) \leq f(x) \leq f(\alpha) \implies -1 \leq f(x) \leq 0$  car  $f(\alpha) = 0$   
 Ainsi  $f$  est négative sur  $[0, \alpha]$ .

**Partie II**

1.  $g(x) = x \iff \frac{1+x}{1+e^x} = x \iff 1+x = x(1+e^x) \iff 1+x = x+xe^x$   
 $\iff 1 = xe^x \iff e^x = \frac{1}{x}$

2. On a vu en I-2.(b) que  $\alpha$  était l'unique solution dans  $[0, 1]$  de l'équation  $f(x) = 0$  qui est équivalente à  $g(x) = x$ .  
 En conséquence  $\alpha$  est l'unique solution dans  $[0, 1]$  de l'équation  $g(x) = x$ .

3. La fonction  $g$  est dérivable sur  $[0, 1]$  et pour tout  $x$  de  $[0, 1]$ ,

$$g'(x) = \frac{1(1+e^x) - (1+x)e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{1+e^x - e^x - xe^x}{(1+e^x)^2} = \frac{1-xe^x}{(1+e^x)^2} = \frac{-e^x(x-e^{-x})}{(1+e^x)^2}$$

Donc pour tout  $x$  de  $[0, 1]$ ,  $g'(x) = \frac{-e^x f(x)}{(1+e^x)^2}$

Puisque  $\frac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0$ ,  $g'(x)$  et  $f(x)$  sont de signes contraires.

Donc, d'après I - 2 (d),  $f$  étant positive sur  $[0, \alpha]$ , pour tout  $x$  de  $[0, \alpha]$ ,  $g'(x) \geq 0$ .  
 Ainsi la fonction  $g$  est croissante sur  $[0, \alpha]$ .

**Partie III**

1. Pour tout entier naturel  $n$ , notons  $\mathcal{P}_n$  la propriété : «  $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$  »

• **Initialisation** : vérifions la propriété au rang 0.

$u_0 = 0$  et  $u_1 = g(0) = 1/2$ . Or d'après I-2.(c),  $\frac{1}{2} \leq \alpha$ . Donc  $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq \alpha$ .

• **Hérédité** : soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Supposons la propriété  $\mathcal{P}_k$  vraie. Démontrons alors, sous cette hypothèse, que  $\mathcal{P}_{k+1}$  est vraie.

On sait que  $g$  est croissante sur  $[0, \alpha]$ .

Or, d'après l'hypothèse de récurrence,  $0 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq \alpha$

Donc  $g(0) \leq g(u_k) \leq g(u_{k+1}) \leq g(\alpha)$

avec  $g(0) = 1/2$ ;  $g(u_k) = u_{k+1}$ ;  $g(u_{k+1}) = u_{k+2}$  et  $g(\alpha) = \alpha$

Par conséquent  $0 \leq \frac{1}{2} \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq \alpha$  et  $\mathcal{P}_{k+1}$  est vraie.

• **Conclusion** : le principe de récurrence permet de conclure que pour tout entier naturel  $n$ ,  $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$

2. La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante

Cette suite est également majorée par  $\alpha$ . Il en résulte d'après le théorème de convergence monotone, que la suite

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente

3. Notons  $\ell$  la limite de la suite  $(u_n)$ . Alors il est clair que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell$

Puisque  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq \alpha$ , on obtient par passage à la limite dans cet encadrement :  $0 \leq \ell \leq \alpha$ . En particulier

D'où  $\lim_{x \rightarrow \ell} g(x) = g(\ell)$ . On en déduit par composition que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(u_n) = g(\ell)$

Or par définition de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $g(u_n) = u_{n+1}$ .

Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = g(\ell)$ . Par unicité de la limite d'une suite, on en déduit que  $g(\ell) = \ell$  autrement dit  $\ell$  est une solution dans  $[0, 1]$  de l'équation  $g(x) = x$ .

Or cette équation admet  $\alpha$  pour unique solution. Donc  $\ell = \alpha$

4. La calculatrice fournit  $u_4 \approx 0,567143$  à  $10^{-6}$  près par défaut (valeur arrondie).