BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2007

MATHÉMATIQUES

- Série S -

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Le sujet comporte deux annexes à rendre avec la copie.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées de 1 à 5.

EXERCICE 1 **(5 points)**

Commun à tous les candidats

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs tels que $a < b$.
On désigne par A et par B les points d'abscisses respectives a et b de la courbe Γ représentative de la fonction logarithme népérien dans un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$.
Les points Q et R sont les projetés orthogonaux respectifs des points A et B sur l'axe des ordonnées.

1) a) Donner l'équation réduite de la tangente (T) au point A à la courbe Γ.

b) Déterminer l'ordonnée du point d'intersection P de (T) avec l'axe des ordonnées.
Calculer la longueur PQ. En déduire une construction simple de (T) ; la réaliser sur la figure ***en annexe 1***.

2) Restitution organisée de connaissances

On suppose connue la propriété :
Pour tout couple $(x\ ;\ y)$ de nombres réels strictement positifs, on a $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.

En déduire que, pour tout nombre réel m strictement positif, on a $\ln\left(\sqrt{m}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(m)$

3) Utiliser le résultat de la question **2)** pour placer sur l'axe des abscisses le point G d'abscisse $\sqrt{ab}$.
Expliquer la construction et la réaliser sur la figure de ***l'annexe 1*** (on laissera les traits de construction apparents).

EXERCICE 2 **(4 points)**

Commun à tous les candidats

Soit a un nombre réel tel que $-1 < a < 0$.
On considère la suite u définie par $u_0 = a$, et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = u_n^{\ 2} + u_n.$$

1) Étudier la monotonie de la suite u.

2) a) Soit h la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $h(x) = x^2 + x$. Étudier le sens de variation de la fonction h.
En déduire que pour tout x appartenant à l'intervalle $]-1\ ;\ 0[$, le nombre $h(x)$ appartient aussi à l'intervalle $]-1\ ;\ 0[$.

b) Démontrer que pour tout entier naturel n on a : $-1 < u_n < 0$.

3) Étudier la convergence de la suite u. Déterminer, si elle existe, sa limite.

EXERCICE 3 (6 points)

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur **R** par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1} & si\ x \neq 0 \\ f(0) = 1. \end{cases}$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(\mathrm{O}\ ; \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b) Établir que, pour tout nombre réel x non nul, on a $f(x) = x\left(1 + \dfrac{1}{\mathrm{e}^x - 1}\right)$.

En déduire la limite de f en $+\infty$.

2) Donner, sans démontrer, la limite suivante : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$ et démontrer que f est continue en 0.

3) a) Démontrer que, pour tout nombre réel x, on a : $\mathrm{e}^x \geqslant x + 1$, et que l'égalité n'a lieu que pour $x = 0$.

b) Calculer la dérivée f' de la fonction f et déterminer la fonction g telle que, pour tout nombre réel x non nul, $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x g(x)}{\left(\mathrm{e}^x - 1\right)^2}$.

c) Donner le tableau des variations de f.

4) Soient x un nombre réel non nul et les points $\mathrm{M}\left(x\ ; f(x)\right)$ et $\mathrm{M}'\left(-x\ ; f(-x)\right)$ de la courbe $\mathscr{C}$.

a) Établir que $f(-x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$ puis déterminer le coefficient directeur de la droite (MM').

b) On admet que la fonction f est dérivable en 0. Que suggère alors le résultat précédent ?

EXERCICE 4 **(5 points)**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\,\vec{u},\,\vec{v})$.
A, B, C désignent les points d'affixes respectives $a = -2\sqrt{3}$, $b = \sqrt{3} - 3\,i$ et $c = 2\,i$.

1) a) Écrire b sous forme exponentielle.

b) Les points A et C sont représentés sur la figure **jointe en *annexe 2***. Construire à la règle et au compas le point B sur ce dessin (*laisser les traces de construction apparentes*).

2) On désigne par E le barycentre du système $\{(A\,;\,1)\,;\,(C\,;\,3)\}$ et par F le barycentre du système $\{(A\,;\,2)\,;\,(B\,;\,1)\}$.

a) Établir que l'affixe e du point E est égale à $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}\,i$.

b) Déterminer l'affixe f du point F.

3) a) Démontrer que le quotient $\dfrac{e-c}{e-b}$ peut s'écrire $k\,i$ où k est un nombre réel à déterminer.

En déduire que, dans le triangle ABC, le point E est le pied de la hauteur issue de B. Placer le point E sur le dessin.

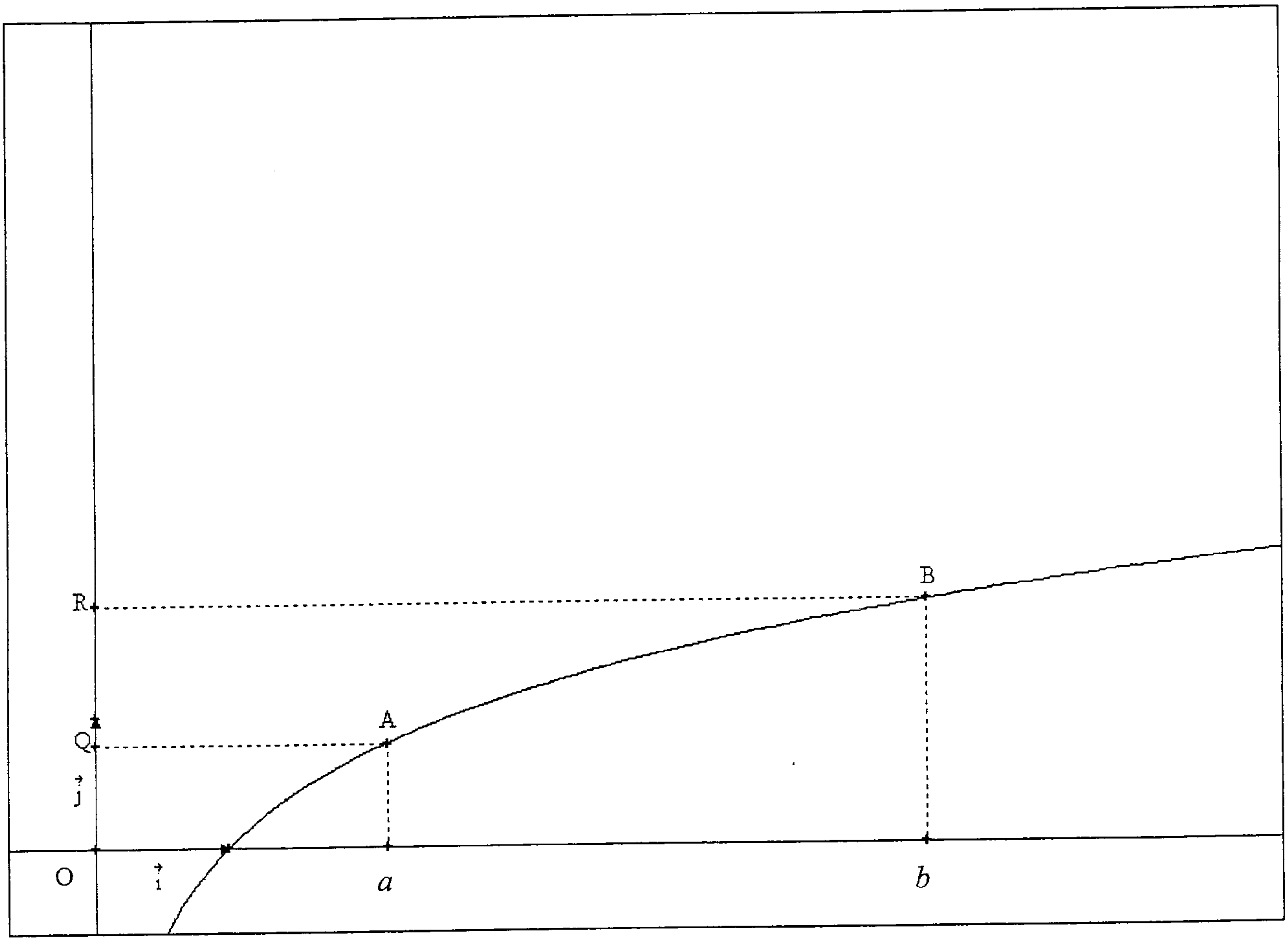
b) Démontrer que le point F possède une propriété analogue. Placer F sur le dessin.

4) On désigne par H le barycentre du système $\{(A\,;\,2)\,;\,(B\,;\,1)\,;\,(C\,;\,6)\}$.
Démontrer que le point H est le point d'intersection des droites (BE) et (CF).
Qu'en déduit-on pour le point H ?

ANNEXE 1

(À rendre avec la copie)

EXERCICE 1



ANNEXE 2

(À rendre avec la copie)

EXERCICE 4