CORRIGE

Ces éléments de correction n'ont qu'une valeur indicative. Ils ne peuvent en aucun cas engager la responsabilité des autorités académiques, chaque jury est souverain.

ELEMENTS DE CORRECTION

Il est rappelé que ce document est à l'usage exclusif des jurys. La règle de confidentialité relative aux commissions d'entente et aux travaux des jurys s'applique à son contenu.

EXERCICE 1 (3 points)

1) $\vec{n}$ (1 ; 2 ; –1) et $\vec{n}'$ (–1 ;1 ;1) sont des vecteurs normaux et $\vec{n}.\vec{n}' = 0$

2) Soit (d) la droite dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{3} + t \\ y = -\dfrac{1}{3} \\ z = t \end{cases}$ où t est un nombre réel

Les points de (d) ont des coordonnées qui vérifient simultanément les équations des deux plans.
(d) est la droite intersection des deux plans.

3) $\mathrm{d}(\mathrm{A},P) = \dfrac{2}{\sqrt{6}}$; $\mathrm{d}(\mathrm{A},P') = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

4) $(\mathrm{d}(\mathrm{A},(d)))^2 = (\dfrac{2}{\sqrt{6}})^2 + (\dfrac{2}{\sqrt{3}})^2 = 2$ d'où $\mathrm{d}(\mathrm{A},(d)) = \sqrt{2}$.

EXERCICE 2 (3 points)

1) $(uv)' = u'v + uv'$. On utilise la linéarité de l'intégration pour obtenir la formule d'intégration par parties.

$\int_a^b (uv)'(x)\mathrm{d}x = \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x$.

Donc $\int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x$

2) a) Posons : $u'(x) = \mathrm{e}^x$ et $v(x) = \sin x$

$\mathrm{I} = [e^x \sin x]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \cos x\mathrm{d}x$ donc I = – J car le premier calcul entre crochet est nul. Posons :

$u'(x) = \sin x$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$

$\mathrm{I} = [-\mathrm{e}^x \cos x]_0^\pi + \int_0^\pi \mathrm{e}^x \cos x\mathrm{d}x$ donc $\mathrm{I} = \mathrm{J} + \mathrm{e}^\pi + 1$

b) Donc $\mathrm{I} = \dfrac{\mathrm{e}^\pi + 1}{2}$ et $\mathrm{J} = -\dfrac{\mathrm{e}^\pi + 1}{2}$

EXERCICE 3 (5 points) **Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Partie A

On considère l'équation : (E) $z^3-(4+\mathrm{i})z^2+(13+4\mathrm{i})z-13\mathrm{i}=0$

1) $\mathrm{i}^3-(4+\mathrm{i})\mathrm{i}^2+(13+4\mathrm{i})\mathrm{i}-13\mathrm{i}=0$.

2) $z^3-(4+\mathrm{i})z^2+(13+4\mathrm{i})z-13\mathrm{i}=(z-\mathrm{i})(z^2-4z+13)$.

3) $S=\{\mathrm{i};2+3\mathrm{i};2-3\mathrm{i}\}$.

Partie B

Dans le plan complexe, rapporté au repère orthonormal $(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v})$, on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives i ; 2 + 3i et 2 - 3i.

1) $\mathrm{A}'=r'(\mathrm{A}) \Leftrightarrow z_{\mathrm{A}'}-z_{\mathrm{B}}=\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{4}}(z_{\mathrm{A}}-z_{\mathrm{B}}) \Leftrightarrow z_{\mathrm{A}'}=2+(3-2\sqrt{2})\mathrm{i}$.

2) $\dfrac{z_{\mathrm{A}'}-z_{\mathrm{B}}}{z_{\mathrm{C}}-z_{\mathrm{B}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ donc $\arg\left(\dfrac{z_{\mathrm{A}'}-z_{\mathrm{B}}}{z_{\mathrm{C}}-z_{\mathrm{B}}}\right)=0\ [2\pi]$.

Les points A', B et C sont alignés et $z_{\mathrm{A}'}-z_{\mathrm{B}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}(z_{\mathrm{C}}-z_{\mathrm{B}})$.

L'application complexe associée à l'homothétie de centre B qui transforme A′ en C est

$$z \mapsto \frac{\sqrt{2}}{3}z+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)(2+3\mathrm{i}).$$

EXERCICE 3 (5 points) **Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Voir figure complétée en annexe 1.

Dans le plan complexe, rapporté au repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère les points A, B et C, d'affixes respectives $-5 + 6i$; $-7 - 2i$ et $3 - 2i$.

On admet que le point F, d'affixe $-2 + i$ est le centre du cercle Γ, circonscrit au triangle ABC.

1) $\dfrac{z_H - z_A}{z_C - z_A} = \dfrac{3}{8}(1-i) = \dfrac{3\sqrt{2}}{8}e^{-\frac{i\pi}{4}}$.

La similitude directe de centre A qui transforme C en H est une similitude d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$ et de rapport $\dfrac{3\sqrt{2}}{8}$.

2) a) Soit s la transformation d'écriture complexe $z' = a\bar{z} + b$ qui, au point M, associe le point M'.

Les points A et C sont invariants par s. Donc $s(A) = A$ et $s(C) = C$.

Les complexes a et b vérifient donc $\begin{cases} a(-5-6i)+b=-5+6i \\ a(3+2i)+b=3-2i \end{cases}$.

L'écriture complexe de s est donc $z' = -i\bar{z} + 1 + i$. Donc s est la symétrie orthogonale d'axe (AC).

b) $z_E = -i\,\bar{z}_H + 1 + i = 6i + 1$.

c) $FE = FA = \sqrt{34}$ donc E est sur Γ.

3) Soit I le milieu du segment [AC]. $z_I = -1+2i$.

G est l'image du point I par l'homothétie de centre B et de rapport $\dfrac{2}{3}$ donc :

$$z_G - z_B = \frac{2}{3}(z_I - z_B) \Leftrightarrow z_G = -3 + \frac{2}{3}i$$

$z_G - z_H = 2 + \dfrac{2}{3}i$ $z_F - z_H = 3 + i$ donc $z_G - z_H = \dfrac{3}{2}(z_F - z_H)$ et les points H, G et F sont ainsi alignés.

EXERCICE 4 (4 points)

1) d : 0,2048

2) b : 0,275

3) b : 0,091

4) a : $\dfrac{5}{9}$

EXERCICE 5 (5 points)

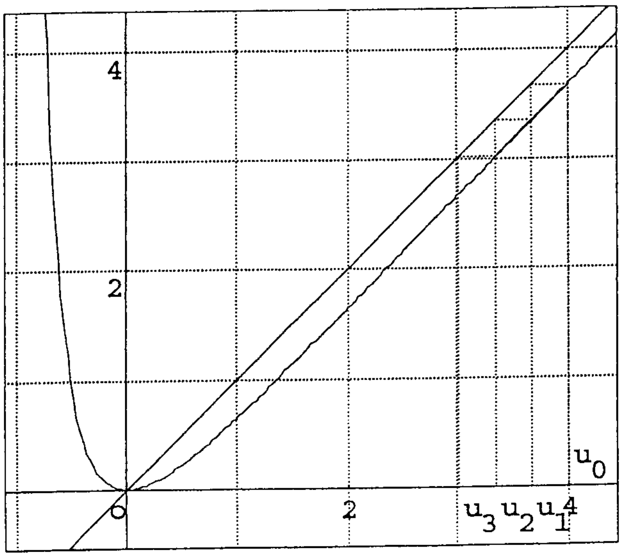
Partie A

1) On trouve que : $f'(x)=1-\dfrac{(1+x)\times\dfrac{1}{1+x}-\ln(1+x)}{(1+x)^2}=\dfrac{(1+x)^2-1+\ln(1+x)}{(1+x)^2}$.

2) $N(0)=0$. D'après les variations de N, on peut dire que N est strictement négative sur $]-1;0[$ et strictement positive sur $]0\,;+\infty[$. Puisque $f'(x)=\dfrac{N(x)}{(1+x)^2}$, on en déduit que f est strictement décroissante sur $]-1\,;\,0]$ et strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

3) On doit résoudre l'équation $f(x)=x$, c'est-à-dire l'équation $\ln(1+x)=0$, c'est à dire l'équation $1+x=1$.
$\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ ont un unique point commun qui est le point O.

Partie B



1) La fonction f est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, donc aussi sur $[0;4]$. Donc, si $x\in[0;4]$, alors $f(x)\in[f(0);f(4)]$. Or, $f(0)=0$ et $f(4)=4-\dfrac{\ln(5)}{5}<4$. Donc si $x\in[0;4]$ alors $f(x)\in[0;4]$.

2) a) Voir graphique.

b) On a $u_0=4$, donc $u_0\in[0;4]$.
Supposons que, pour p entier naturel, on ait $u_p\in[0;4]$. Alors $u_{p+1}=f(u_p)\in[0;4]$ d'après la question **1)**.
Donc, d'après l'axiome de récurrence, on a bien $u_n\in[0;4]$ pour tout n de $\mathbf{N}$.

c) On a : $u_{n+1}-u_n=f(u_n)-u_n=u_n-\dfrac{\ln(1+u_n)}{1+u_n}-u_n=-\dfrac{\ln(1+u_n)}{1+u_n}\leqslant 0$ puisque $u_n\geqslant 0$ (question 2b). La suite (u_n) est décroissante.

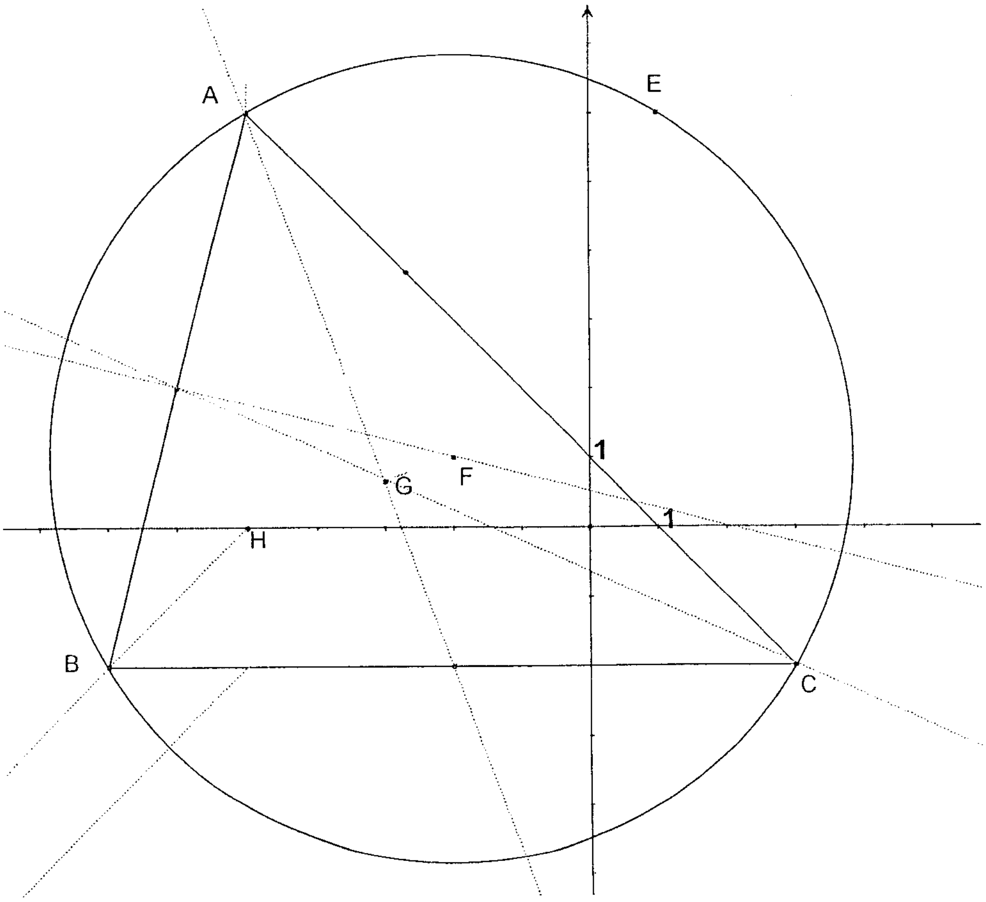
d) La suite (u_n) est décroissante, minorée par 0 ; donc elle converge.

e) On a pour tout n : $u_{n+1}=f(u_n)$. Or : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}f(u_n)=f(\ell)$ puisque f est dérivable sur $]-1;+\infty[$, donc continue sur $]-1;+\infty[$, donc continue en ℓ.
Le réel ℓ est une solution de l'équation $f(x)=x$. Donc $\ell=0$ d'après A)3).

ANNEXE 1
À compléter et rendre avec la copie

EXERCICE 3

<u>Annexe 1</u>: (*exercice* 3 - *spécialité*)



CONSIGNES DE CORRECTION

Capacités évaluées : **1. Restituer et mobiliser des connaissances.** **2. Appliquer des méthodes.** **3. Prendre des initiatives, choisir un modèle, émettre une conjecture, expérimenter.** **4. Mettre en forme un raisonnement, une démonstration, une démarche.** **5. Développer une démarche ou un raisonnement cohérent.** **6. Évaluer-critiquer un résultat, vérifier la validité d'un résultat ou d'une méthode.**

Exercice 1 (3 points)

1. Restituer et mobiliser des connaissances : questions 1) 3). 2. Appliquer des méthodes : questions 1) 2). 4. Mettre en forme un raisonnement, une démonstration, une démarche : questions 1) 2) 4). 5. Développer une démarche ou un raisonnement cohérent : question 4).	Une mobilisation adaptée des capacités 1, 2 et 4 assure l'obtention d'au moins 1,5 points.

Exercice 2 (3 points)

1. Restituer et mobiliser des connaissances : question 1). 2. Appliquer des méthodes : question 2). 3. Prendre des initiatives, choisir un modèle, émettre une conjecture, expérimenter : question 2)a). 4. Construire et mettre en forme un raisonnement, une démonstration, une démarche : questions 1) 2)b).	Une mobilisation adaptée des capacités 1, 2 et 3 assure l'obtention d'au moins 1,5 points.

Exercice 3 (5 points) non spécialité

1. Restituer et mobiliser des connaissances : questions A-1), B-1). 2. Appliquer des méthodes : questions A-2) 3). 4. Construire et mettre en forme un raisonnement, une démonstration, une démarche : question B 2) 5. Développer une démarche ou un raisonnement cohérent : question B-2).	Une mobilisation adaptée des capacités 1, 2 et 4 assure l'obtention d'au moins 3 points.

Exercice 3 (5 points) spécialité

1. Restituer et mobiliser des connaissances : questions 1), 2)a). 2. Appliquer des méthodes : questions 1), 2)a) b) c). 4. Construire et mettre en forme un raisonnement, une démonstration, une démarche : question 3). 5. Développer une démarche ou un raisonnement cohérent : question 3). 6. Évaluer-critiquer un résultat, vérifier la validité d'un résultat ou d'une démarche : questions 2)b) c).	Une mobilisation adaptée des capacités 1, 2, 4 et 5 assure l'obtention d'au moins 3 points.

Exercice 4 (4 points)

QCM	

Exercice 5 (5 points)

1. Restituer et mobiliser des connaissances : questions A-1), B-2)d. **2.** Appliquer des méthodes : questions A, B-2)a) c). **3.** Prendre des initiatives, choisir un modèle, émettre une conjecture, expérimenter : questions B-2)b). **4.** Mettre en forme un raisonnement, une démonstration, une démarche : questions B-1) 2)c). **5.** Développer une démarche ou un raisonnement cohérent : questions A-2), B-1) 2)c). **6.** Évaluer-critiquer un résultat, vérifier la validité d'un résultat ou d'une démarche : questions A-2), B-2)c) e).	Une mobilisation adaptée des capacités 1, 2, 5 et 6 assure l'obtention d'au moins 3 points.