CORRIGE

Ces éléments de correction n'ont qu'une valeur indicative. Ils ne peuvent en aucun cas engager la responsabilité des autorités académiques, chaque jury est souverain.

ELEMENTS DE CORRECTION

Il est rappelé que ce document est à l'usage exclusif des jurys. La règle de confidentialité relative aux commissions d'entente et aux travaux des jurys s'applique à son contenu.

EXERCICE 1 (5 points)

1) P est vraie. On la démontre par récurrence.
Q est fausse. Contre-exemple : $u(x) = x^2$ et $n = 2$.

2) a) Sur $]-\pi\,;0[$ $h'(x) = -\sin x\, g'(\cos x) = \dfrac{-\sin x}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = \dfrac{-\sin x}{|\sin x|} = 1.$

b) $h(-\dfrac{\pi}{2}) = g(0) = 0.$

$h'(x) = 1$ d'où $h(x) = x + k$ avec $k \in \mathbf{R}$.

$h(-\dfrac{\pi}{2}) = 0$, donc sur $]-\pi\,;0[$: $h(x) = x + \dfrac{\pi}{2}$.

EXERCICE 2 (6 points)

1) a) Voir annexe

b) Si la suite u est convergente, u_n tend vers ℓ et u_{n+1} tend aussi vers ℓ quand n tend vers $+\infty$.
Comme $u_{n+1} = \frac{1}{3}\,u_n + \frac{23}{27}$ par unicité de la limite on a $\ell = \frac{1}{3}\,\ell + \frac{23}{27}$, donc $\ell = \frac{23}{18}$.

c) On démontre par récurrence sur n que $u_n \geqslant \frac{23}{18}$.
Initialisation : $u_0 = 2$.
Conservation de la propriété :
Pour p entier naturel quelconque, on a $u_p \geqslant \frac{23}{18}$.
La fonction affine qui à un réel x associe le réel $\frac{1}{3}\,x + \frac{23}{27}$ est croissante sur $\mathbf{R}$,
donc $\frac{1}{3}\,u_p + \frac{23}{27} \geqslant 2\times\frac{1}{3}+\frac{23}{27}$ ce qui entraîne $u_{p+1} \geqslant \frac{23}{18}$.

d) Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = -\frac{2}{3}u_n + \frac{23}{27}$ qui équivaut à $u_{n+1} - u_n = -\frac{2}{3}(u_n - \frac{23}{18})$
donc pour tout entier naturel n on a $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.
La suite u est décroissante et minorée par $\frac{23}{18}$, elle est convergente de limite $\frac{23}{18}$.

2) a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{10^k}$ est la somme des $n-1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison égale à $\frac{1}{10}$ et de premier terme égal à $\frac{1}{100}$.

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{100}\times\frac{1-\dfrac{1}{10^{n-1}}}{1-\dfrac{1}{10}} = \frac{1}{90}\times\left(1-\frac{1}{10^{n-1}}\right).$$

b) Pour tout entier naturel n supérieur à 2, $v_n = 1 + \frac{2}{10} + 7\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{10^k}$

$$v_n = 1 + \frac{2}{10} + 7 \times \frac{1}{90} \times \left(1 - \frac{1}{10^{n-1}}\right)$$

Comme $\frac{1}{10^{n-1}}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, v_n tend vers $1 + \frac{2}{10} + \frac{7}{90} = \frac{115}{90} = \frac{23}{18}$.

La suite v est convergente vers $r = \frac{23}{18}$.

3) La suite u est décroissante et la suite v est croissante, ces deux suites ont la même limite donc la différence $v_n - u_n$ tend vers 0. Les deux suites sont adjacentes.

EXERCICE 3 (5 points) ***Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité***

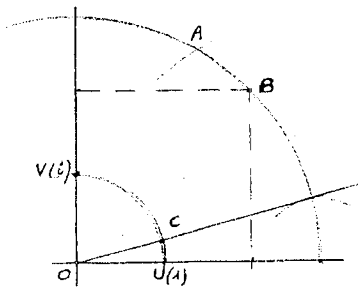
a) $Z = \frac{(\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{6})(1-\mathrm{i})}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

b) pour z_1 : le module est $2\sqrt{2}$ et un argument est $\frac{\pi}{3}$. Pour z_2 : le module est $2\sqrt{2}$ et un argument est $\frac{\pi}{4}$.

Pour Z : le module est 1 et un argument est $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$.

c) On déduit de **a)** et **b)** $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

d)



e) $2007\frac{\pi}{12} = 167\pi + \frac{3\pi}{12} = 168\pi - \frac{9\pi}{12} = 168\pi - \frac{3\pi}{4}$.

Pour Z^{2007} : le module est 1 et un argument est $-\frac{3\pi}{4}$ d'où $Z^{2007} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

EXERCICE 3 (5 points) ***Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité***

1) a)

a	1	2	3	4	5	6
y	1	4	5	2	3	6

b) Par compatibilité des congruences avec la multiplication on a :
$3\,x \equiv 5$ (modulo 7) donc $5 \times 3\,x \equiv 5 \times 5$(modulo 7) d'où $x \equiv 4$ (mod 7).
Réciproque évidente.

c) x est solution de l'équation $a\,x \equiv 0$ (modulo 7) si et seulement si 7 divise le produit ax.
a est un entier naturel de $\{1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,5\,;\,6\}$, il est donc premier avec 7.
7 divise ax, 7 est premier avec a. En appliquant le théorème de Gauss : 7 divise x.
Si x est un multiple de 7, le produit ax l'est aussi.
Les seuls entiers x solutions de l'équation $a\,x \equiv 0$ (modulo 7) sont les multiples de 7.

2) a) a est un élément de A_p, il est donc premier avec p qui est un nombre premier.
Le petit théorème de Fermat donne $a^{p-1} \equiv 1$ (modulo p) et a^{p-2} est solution de l'équation $ax \equiv 1$ (modulo p).

b) a est un élément de A_p, il est donc premier avec p et a^{p-2} n'est pas un multiple de p.
Le reste r de la division euclidienne par p est donc un élément de A_p.
$a^{p-2} \equiv r$ (modulo p) par compatibilité des congruences avec la multiplication $a^{p-1} \equiv ar$ (modulo p) donc $ar \equiv 1$ (modulo p).
r est solution de l'équation $ax \equiv 1$ (modulo p).
Unicité :
Si x est une autre solution dans A_p de $ax \equiv 1$ (modulo p) on a $ax \equiv ar$ (modulo p), p divise $ax - ar$, donc p divise $a(x - r)$ et p est premier avec a donc p divise $x - r$.
$x - r$ est un entier compris strictement entre $-p$ et p, multiple de p, il est donc nul.
r est la seule solution dans A_p de $ax \equiv 1$ (modulo p).

c) Soient 2 entiers tels que $xy \equiv 0$ (modulo p).
p est un nombre premier qui divise le produit xy soit p divise x soit p ne divise pas x.
Dans ce dernier cas, le théorème de Gauss permet d'affirmer que p divise y.

d) 31 est un nombre premier.
$2\times\ 16 = 32$ donc $2\times\ 16 \equiv 1$ (modulo 31) : 16 est la seule solution dans A_{31} de l'équation $2x \equiv 1$ (modulo 31).
$3\times 21 = 63$ donc $3\times 21 \equiv 1$ (modulo 31): 21 est la seule solution dans A_{31} de l'équation $3\,x \equiv 1$ (modulo 31).
$6\,x^2 - 5\,x + 1 \equiv 0$ (modulo 31) équivaut à $(3x - 1)(2x - 1) \equiv 0$ (modulo 31) qui équivaut à $2x \equiv 1$ (modulo 31) ou $3\,x \equiv 1$ (modulo 31) d'après **2) c)**.
Les solutions dans **Z** de l'équation sont les entiers qui s'écrivent $n = 31\,k + 16$ ou $n = 31\,k + 21$, k désignant un entier relatif quelconque.

EXERCICE 4 (4 points)

1) (E_0) est du type $y' = ay + b$ avec $a = -1$ et $b = 1$: l'ensemble des solutions de l'équation (E_0) et l'ensemble des fonctions telles que $y(x) = Ce^{-x} + 1$ où C constante réelle quelconque.

2) f solution de (E) $\Leftrightarrow \forall x \in \mathrm{I}\ f'(x) + (1 + \tan x) f(x) = \cos x$ où $\mathrm{I} = \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathrm{I}\ g'(x) \cos x - g(x) \sin x + (1 + \tan x)\, g(x) \cos x = \cos x$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathrm{I}\ g'(x) \cos x + g(x) \cos x = \cos x$: or $\cos x \neq 0$ sur I.

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathrm{I}\ g'(x) + g(x) = 1$

$\Leftrightarrow g$ solution de (E_0).

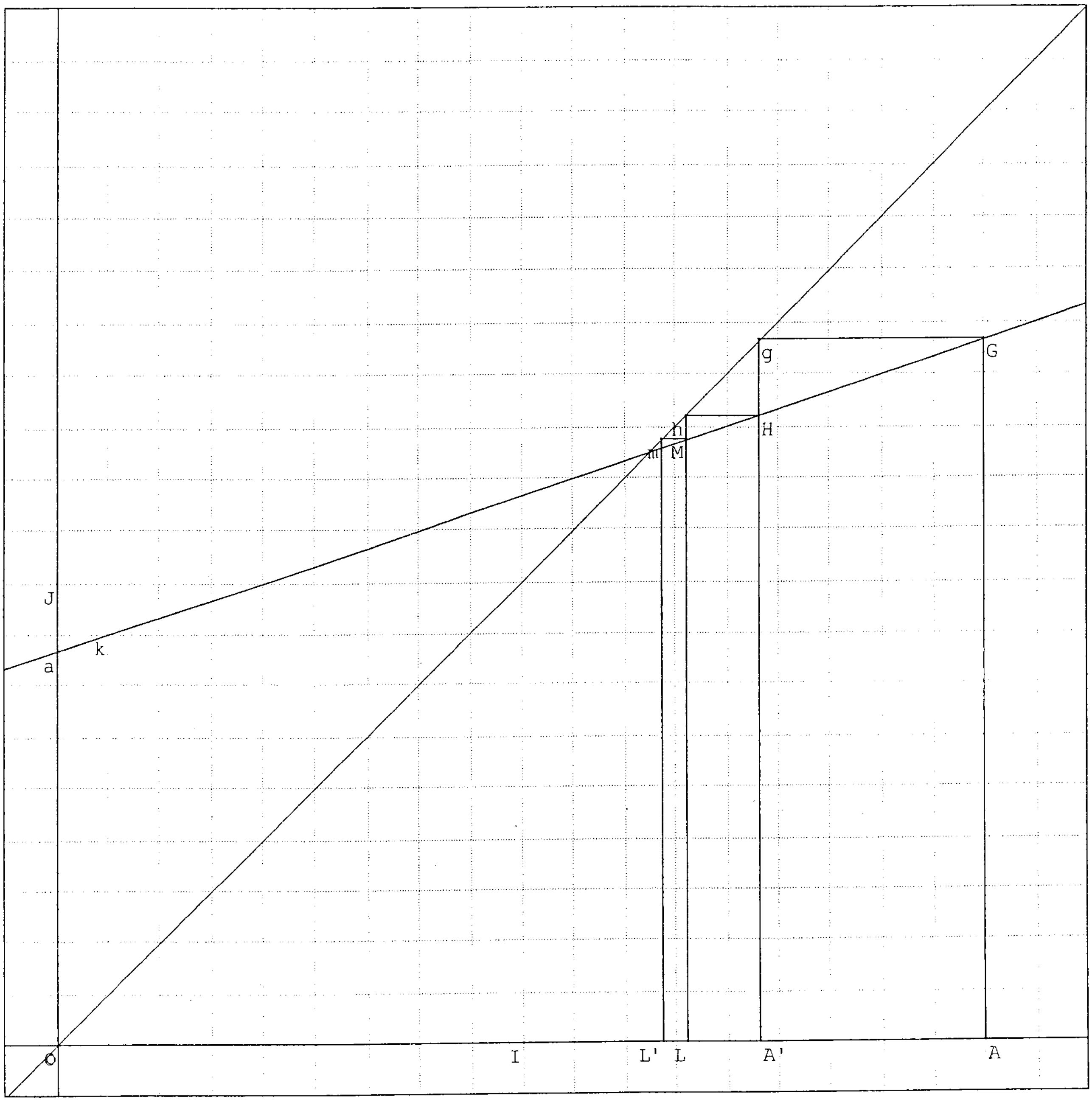
3) f solution de (E) et $f(0) = 0 \Leftrightarrow g(x) = Ce^{-x} + 1$ et $f(0) = 0$

$\Leftrightarrow f(x) = (Ce^{-x} + 1) \cos x$ et $C = -1$

$\Leftrightarrow f(x) = (1 - e^{-x}) \cos x$

Annexe

exercice 2



CONSIGNES DE CORRECTION

Capacités évaluées : **1. Restituer et mobiliser des connaissances.** **2. Appliquer des méthodes.** **3. Prendre des initiatives, choisir un modèle, émettre une conjecture, expérimenter.** **4. Construire et mettre en forme un raisonnement, une démonstration, une démarche.** **5. Développer une démarche ou un raisonnement cohérent.** **6. Évaluer-critiquer un résultat, vérifier la validité d'un résultat ou d'une méthode.**

Exercice 1 (5 points)

1. Restituer et mobiliser des connaissances : questions 1) 2)a). 2. Appliquer des méthodes : questions 1) 2). 3. Prendre des initiatives : question 1). 4. Mettre en forme un raisonnement, une démonstration, une démarche : question 2).	Une mobilisation adaptée des capacités 1, 2 assure l'obtention d'au moins 2 points.

Exercice 2 (6 points)

1. Restituer et mobiliser des connaissances : question 3). 2. Appliquer des méthodes : questions 1)a) 2)a) 1)d). 3. Prendre des initiatives, choisir un modèle, émettre une conjecture, expérimenter : question 1)c). 4. Construire et mettre en forme un raisonnement, une démonstration, une démarche : questions 1)b) 1)c) 2)b). 5. Développer une démarche ou un raisonnement cohérent : questions 1)b) 1)c) 2)b).	Une mobilisation adaptée des capacités 1, 2 assure l'obtention d'au moins 2 points.

Exercice 3 (5 points) non spécialité

1. Restituer et mobiliser des connaissances : questions b) e). 2. Appliquer des méthodes : questions a) b). 4. Construire et mettre en forme un raisonnement, une démonstration, une démarche : questions c) d) e).	Une mobilisation adaptée des capacités 1, 2 assure l'obtention d'au moins 2 points.

Exercice 3 (5 points) spécialité

1. Restituer et mobiliser des connaissances question 1)a). 2. Appliquer des méthodes : questions 1)b) 2)b). 4. Construire et mettre en forme un raisonnement, une démonstration, une démarche : questions 1)b) 1)c) 2)b) 2)c). 5. Développer une démarche ou un raisonnement cohérent : questions 1)b) 1)c) 2)b) 2)c). 6. Évaluer-critiquer un résultat, vérifier la validité d'un résultat ou d'une méthode : questions 2)a) 2)d).	Une mobilisation adaptée des capacités 1, 2 assure l'obtention d'au moins 2 points.

Exercice 4 (4 points)

1. Restituer et mobiliser des connaissances : questions 1) 2). **2.** Appliquer des méthodes : questions 1) 2) 3). **4.** Construire et mettre en forme un raisonnement, une démonstration, une démarche : questions 2) 3). **5.** Développer une démarche ou un raisonnement cohérent : questions 2) 3).	Une mobilisation adaptée des capacités 1, 2 et 4 assure l'obtention d'au moins 2 points.