

CORRECTION DU BAC 2007

Terminale S

Liban

Exercice 1

1) a) $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$; $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$; $\ln x < 0 \Leftrightarrow x < 1$ (la fonction \ln étant strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$).

$1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$; $1 - \ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x > 1 \Leftrightarrow x > e$;
 $1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow x < e$ (la fonction \ln étant strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$).

➤ On en déduit le tableau de signes suivant :

x	0	1	e	+∞		
signe de $\ln x$		-	0	+	+	
signe de $1 - \ln x$		+		+	0	-
signe de $(\ln x)(1 - \ln x)$		-	0	+	0	-

b) Pour étudier la position relatives des courbes C et C' sur $]0 ; +\infty[$, il suffit d'étudier le signe de $f(x) - g(x)$ sur cet intervalle.

Or $f(x) - g(x) = \ln x - (\ln x)^2 = (\ln x)(1 - \ln x)$; alors on en déduit, d'après la question précédente que :

- sur $]0 ; 1[\cup]e ; +\infty[$, la courbe C est en dessous de C' ;
- sur $]1 ; e[$, la courbe C est au dessus de C' ;
- si $x = 1$ et $x = e$, les courbes C et C' se coupent.

2) a) La fonction \ln est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et la fonction $x \mapsto x^2$ est dérivable sur \mathbb{R} , alors la fonction g est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ en tant que composée de deux fonctions dérivables.

Donc, la fonction h est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ en tant que somme de deux fonctions dérivables sur $]0 ; +\infty[$.

Soit x un réel strictement positif, $h'(x) = \frac{1}{x} - 2 \times \frac{1}{x} \times (\ln x)^{2-1} = \frac{1 - 2 \ln x}{x}$.

Comme x est strictement positif, alors le signe de $h'(x)$ dépend de celui de $(1 - 2 \ln x)$.

Or $1 - 2 \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$; $1 - 2 \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow x < \sqrt{e}$;

$1 - 2 \ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x > \sqrt{e}$ (la fonction \ln étant strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$).

Par conséquent, **la fonction h est croissante sur $]0 ; \sqrt{e}[$ et est décroissante sur $]\sqrt{e} ; +\infty[$.**

b) Les points M et N ont pour coordonnées respectives $(x ; f(x))$ et $(x ; g(x))$.

On en déduit que : $MN = \sqrt{(g(x) - f(x))^2} = |g(x) - f(x)|$. Or sur $]1 ; e]$, $f(x) \geq g(x)$ d'après la question 1). D'où : $MN = f(x) - g(x) = h(x)$.

Or, d'après la question précédente, la fonction h admet un maximum pour $x = \sqrt{e}$.

Par conséquent, sur l'intervalle $]1 ; e]$, **la valeur maximale de MN est obtenue pour $x = \sqrt{e}$.**

c) L'intervalle d'étude est $]0 ; +\infty[$.

Posons $X = \ln x$; l'équation $(\ln x)^2 - \ln x = 1$ équivaut à $X^2 - X - 1 = 0$.

Calculons le discriminant : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5$.

Comme $\Delta > 0$, alors l'équation $X^2 - X - 1 = 0$ admet deux solutions

$$X_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ et } X_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Si $X_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$, alors $\ln(x_1) = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$; d'où $x_1 = e^{\frac{1 - \sqrt{5}}{2}}$.

Si $X_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, alors $\ln(x_2) = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$; d'où $x_2 = e^{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$.

Par conséquent, **l'équation $(\ln x)^2 - \ln x = 1$ admet deux solutions $x_1 = e^{\frac{1 - \sqrt{5}}{2}}$ et $x_2 = e^{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$.**

d) D'après la question 2) b), $MN = \sqrt{(g(x) - f(x))^2} = |g(x) - f(x)|$. Or sur $]0 ; 1[\cup]e ; +\infty[$, $f(x) < g(x)$. Donc, sur $]0 ; 1[\cup]e ; +\infty[$, $MN = -(f(x) - g(x)) = -h(x) = -\ln x + (\ln x)^2$.

On en déduit que : $MN = 1$ équivaut à $(\ln x)^2 - \ln x = 1$, c'est-à-dire à $x = e^{\frac{1 - \sqrt{5}}{2}}$ ou à $x = e^{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$ d'après la question précédente.

Par conséquent, **sur $]0 ; 1[\cup]e ; +\infty[$, il existe deux réels $a = e^{\frac{1 - \sqrt{5}}{2}}$ et $b = e^{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$ ($a < b$) pour lesquels la distance MN est égale à 1.**

3) a) Calculons $\int_1^e \ln x \, dx$.

$$\text{Posons } \begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = 1 \end{cases} \text{ . Alors } \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = x \end{cases}.$$

Les fonctions u' , v et $(uv)'$ sont continues et dérivables sur $]1 ; e]$, d'après la méthode de l'intégration par parties :

$$\int_1^e \ln x \, dx = [x \ln x]_1^e - \int_1^e x \times \frac{1}{x} \, dx = e \ln e - [x]_1^e = e - e + 1 = 1.$$

b) La fonction G est dérivable sur $]0; +\infty[$ en tant que produit et somme de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$.

Soit x un réel strictement positif.

$$G'(x) = 1 \times [(\ln x)^2 - 2 \ln x + 2] + x \times \left[2 \times \frac{1}{x} \times (\ln x) - 2 \times \frac{1}{x} \right] = (\ln x)^2 - 2 \ln x + 2 + 2 \ln x - 2.$$

Par conséquent, $G'(x) = (\ln x)^2 = g(x)$ pour tout réel x strictement positif.

Par suite, la fonction G est une primitive de g sur $]0; +\infty[$.

c) Comme C est au dessus de C' sur $]1; e[$, alors $A = \int_1^e (f(x) - g(x)) dx$.

$$\text{Or } \int_1^e (f(x) - g(x)) dx = \int_1^e f(x) dx - \int_1^e g(x) dx = 1 - [G(x)]_1^e = 1 - G(e) + G(1).$$

$$\text{De plus, } G(1) = 1 \times [(\ln 1)^2 - 2 \ln 1 + 2] = 2 \text{ et } G(e) = e \times [(\ln e)^2 - 2 \ln e + 2] = e.$$

Donc, $A = 1 - e + 2 = 3 - e$ u.a.

Exercice 2 (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

1) D'après l'énoncé, la droite (d) a pour vecteur directeur $\vec{u} \left(-\frac{1}{2}; 0; -\frac{3}{2} \right)$.

On remarque que les coordonnées des vecteurs \vec{u} et $\vec{j}(0; 1; 0)$ ne sont pas proportionnelles; d'où ces vecteurs ne sont pas colinéaires.

Par suite, la droite (d) n'est pas parallèle à l'axe $(O; \vec{j})$.

La proposition 1 est donc fautive.

2) Comme P est orthogonal à (d) , alors $\vec{u} \left(-\frac{1}{2}; 0; -\frac{3}{2} \right)$ est un vecteur normal à P .

$$\text{Alors } P \text{ a pour équation } -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}z + d = 0.$$

Or A de coordonnées $(2; -1; 1)$ appartient à P , d'où: $-\frac{1}{2} \times 2 - \frac{3}{2} \times 1 + d = 0$, c'est-à-dire

$$d = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}.$$

Donc P a pour équation $-\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}z + \frac{5}{2} = 0$, ou encore $x + 3z - 5 = 0$.

La proposition 2 est donc vraie.

3) Comme C est le point d'abscisse 1, alors $2 - \frac{t}{2} = 1$, c'est-à-dire $t = 2$; d'où C a pour coordonnées $(1; 1; 2)$.

$$\text{On a : } \overline{AB} \cdot \overline{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}), \text{ soit } \cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{AB \times AC}.$$

Or \overline{AB} et \overline{AC} ont pour coordonnées respectives $(2; -1; 1)$ et $(-1; 2; 1)$; alors

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 2 \times (-1) + (-1) \times 2 + 1 \times 1 = -3, \quad AB = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{6} \text{ et}$$

$$AC = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}.$$

$$\text{On en déduit que : } \cos(\widehat{BAC}) = \frac{-3}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} = -\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right).$$

Par conséquent, la mesure de l'angle géométrique \widehat{BAC} est $\frac{2\pi}{3}$ radians.

La proposition 3 est donc fausse.

4) Comme G est le barycentre des points pondérés $(A, -1)$, $(B, 1)$ et $(C, 1)$, alors G a

$$\text{pour coordonnées } \begin{cases} x_G = \frac{-x_A + x_B + x_C}{-1+1+1} \\ y_G = \frac{-y_A + y_B + y_C}{-1+1+1} \\ x_G = \frac{-y_A + y_B + y_C}{-1+1+1} \end{cases}, \text{ c'est-à-dire } \begin{cases} x_G = \frac{3}{1} = 3 \\ y_G = \frac{0}{1} = 0. \\ x_G = \frac{3}{1} = 3 \end{cases}$$

On en déduit que le milieu du segment $[AG]$ a pour coordonnées $\left(\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}; 2\right)$.

Or le milieu du segment $[BC]$ a pour coordonnées $\left(\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}; 2\right)$.

Donc $[AG]$ et $[BC]$ ont le même milieu.

La proposition 4 est donc vraie.

5) Le rayon de la sphère de centre C et passant par B est $BC = \sqrt{18}$.

Calculons la distance du point C au plan P : $\frac{|x_C + 3z_C - 5|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 3^2}} = \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{5}$.

Or $\frac{\sqrt{10}}{5}$ est strictement inférieur à $\sqrt{18}$, donc la sphère coupe le plan P .

La proposition 5 est donc vraie.

Exercice 2 (candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

1) La similitude directe de centre A d'affixe $\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport 2 a pour

écriture complexe $z' - \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i\right) = 2 e^{i\frac{\pi}{2}} \left(z - \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i\right)\right)$, soit

$$z' = 2i \left(z - \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i\right)\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i\right) = 2iz - \frac{2}{5}i + \frac{4}{5} + \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i = 2iz + 1.$$

La proposition 1 est donc vraie.

2) Soit P le plan d'équation $z = 5$.

$$\begin{aligned} M(x; y; z) \in S \cap P &\text{ équivaut à } \begin{cases} z = 5 \\ z = x^2 + 2x + y^2 + 1 \end{cases} \\ &\text{équivaut à } \begin{cases} z = 5 \\ x^2 + 2x + y^2 + 1 = 5 \end{cases} \\ &\text{équivaut à } \begin{cases} z = 5 \\ (x+1)^2 - 1 + y^2 + 1 = 5 \end{cases} \\ &\text{équivaut à } \begin{cases} z = 5 \\ (x+1)^2 + y^2 = 5 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc la section de la surface S et du plan P est le cercle de centre $(-1; 0; 5)$ et de rayon $\sqrt{5}$.

La proposition 2 est donc fausse.

$$3) 750 = 5^3 \times 6 ; \text{ alors } 5^{750} - 1 = 5^{5^3 \times 6} - 1 = \left(5^{5^3}\right)^6 - 1 = \left(5^{5^3}\right)^{7-1} - 1.$$

Or 7 est un nombre premier qui ne divise pas 5^{5^3} , alors, d'après le petit théorème de Fermat, $\left(5^{5^3}\right)^{7-1} \equiv 1 \pmod{7}$. On en déduit que $\left(5^{5^3}\right)^{7-1} - 1 \equiv 0 \pmod{7}$.

Par conséquent, $5^{750} - 1 = \left(5^{5^3}\right)^{7-1} - 1$ est divisible par 7.

La proposition 3 est donc vraie.

Petit théorème de Fermat : Soit n un entier.

Si p est un nombre premier ne divisant pas n , alors $n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

4) Cherchons le PGCD de $4n+3$ et $3n+1$:

$$\begin{aligned} \text{PGCD}(4n+3, 3n+4) &= \text{PGCD}(4n+3-3n-4, 3n+4) \\ &= \text{PGCD}(n-1, 3n+4) \\ &= \text{PGCD}(n-1, 3n+4) \\ &= \text{PGCD}(3n+4, n-1) \\ &= \text{PGCD}(3n+4-3(n-1), n-1) \\ &= \text{PGCD}(7, n-1) \end{aligned}$$

Or n est congru à 1 modulo 7, alors $n-1$ est congru à 0 modulo 7.

On en déduit que $\text{PGCD}(7, n-1) = 7$.

La proposition 4 est donc vraie.

5) Si il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 2$, alors 2 est un multiple du PGCD de a et b .

Par conséquent, $\text{PGCD}(a, b)$ est égal à 1 ou à 2.

La proposition 5 est donc fausse.

Exercice 3

1) Si le tirage a lieu dans l'urne U_1 à l'étape 2, c'est que l'on a tiré une boule blanche à l'étape 1.

Or il y a 17 boules blanches parmi les 20 de l'urne U_1 .

Par conséquent, $p_2 = \frac{17}{20}$.

2) Soit B_n l'événement : « la boule tirée à l'étape n est blanche ».

$$\text{Si } n=1, \text{ on a : } 0,8p_1 + 0,05 = 0,85 = \frac{85}{100} = \frac{17}{20} = p_2.$$

Si $n \geq 2$: on peut construire l'arbre pondéré suivant (voir page suivante).

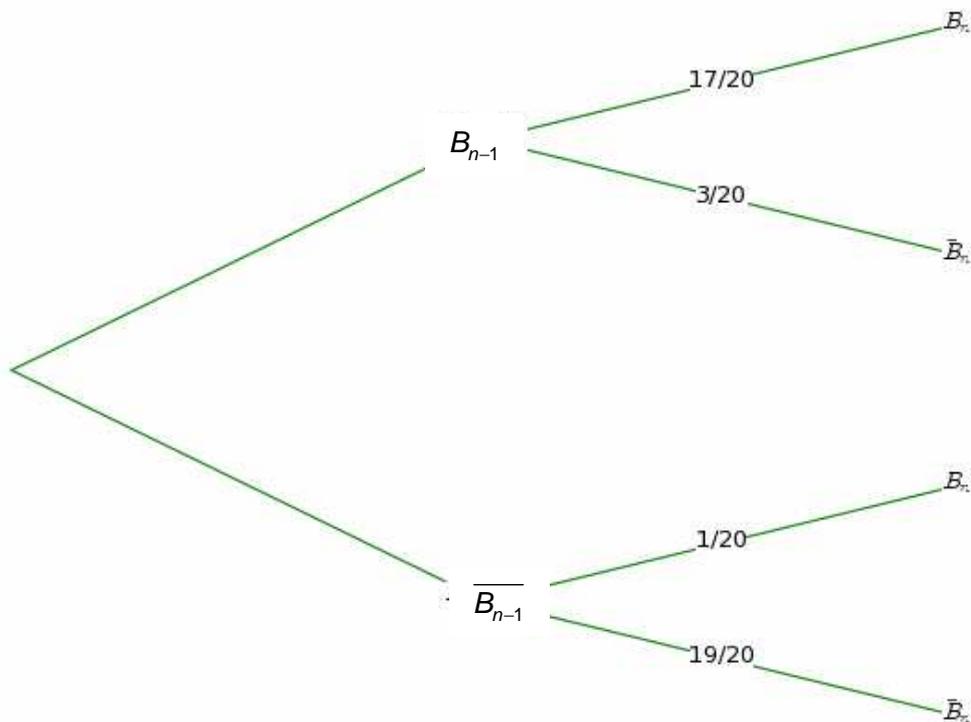
B_{n-1} et $\overline{B_{n-1}}$ forment une partition de l'univers des tirages à l'étape $n-1$; d'après la formule des probabilités totales, on obtient :

$$p_{n+1} = p(A_{n+1}) = p(B_n) = p_{B_{n-1}}(B_n) \times p(B_{n-1}) + p_{\overline{B_{n-1}}}(B_n) \times p(\overline{B_{n-1}}).$$

$$\text{Or } p(B_{n-1}) = p(A_n) = p_n \text{ et } p(\overline{B_{n-1}}) = 1 - p_n, p_{B_{n-1}}(B_n) = \frac{17}{20} \text{ et } p_{\overline{B_{n-1}}}(B_n) = \frac{1}{20}.$$

$$\text{D'où : } p_{n+1} = \frac{17}{20} \times p_n + \frac{1}{20} \times (1 - p_n) = \frac{16}{20} p_n + \frac{1}{20} = 0,8p_n + 0,05.$$

Par conséquent, **pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = 0,8p_n + 0,05$.**



3) $p_3 = 0,8p_2 + 0,05 = 0,8 \times 0,85 + 0,05 = 0,73$. Donc $p_3 = 0,73$.

4) a) Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : « pour tout n de \mathbf{N}^* , $p_n > 0,25$ »

→ Comme $p_1 = 1$, alors on a $\mathcal{P}(1)$ qui est vraie.

→ Montrons que pour tout $n \geq 1$, on a : $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$.

Soit $n \geq 1$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors : $p_n > 0,25$.

D'où $0,8p_n + 0,05 \geq 0,8 \times 0,25 + 0,05$ car la fonction $x \mapsto 0,8x + 0,05$ est strictement croissante sur $]0,25 ; +\infty[$, c'est-à-dire $p_{n+1} > 0,25$.

On en déduit que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a alors prouvé :

$\mathcal{P}(1)$ et pour tout n supérieur ou égal à 1, $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$.

→ Du principe de raisonnement par récurrence, on déduit :

pour tout n supérieur ou égal à 1, $\mathcal{P}(n)$ est vraie

C'est-à-dire : **pour tout n de \mathbf{N}^* , $p_n > 0,25$.**

b) $p_{n+1} - p_n = 0,8p_n + 0,05 - p_n = -0,2p_n + 0,05 = -0,2(p_n - 0,25)$, pour tout entier naturel n non nul.

Or, d'après la question précédente, pour tout entier naturel n non nul, $p_n > 0,25$, c'est-à-dire $p_n - 0,25 > 0$. Donc, $p_{n+1} - p_n < 0$, pour tout entier naturel n non nul.

Par conséquent, **la suite (p_n) est décroissante.**

c) Comme la suite (p_n) est décroissante et minorée par 0,25, alors **elle est convergente vers un réel que l'on notera ℓ**

d) Comme $p_{n+1} = 0,8p_n + 0,05$, par passage aux limites, on obtient :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_{n+1} = 0,8 \times \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n + 0,05$, c'est-à-dire $\ell = 0,8\ell + 0,05$.

D'où : $\ell = \frac{0,05}{0,2} = 0,25$. Par conséquent, **la suite (p_n) converge vers 0,25.**

Exercice 4

1) $z' = \frac{z}{|z|}(2-|z|) = \frac{r e^{i\alpha}}{r}(2-r)$ car $|z| = r$. Par conséquent, $z' = (2-r)e^{i\alpha}$.

2) Comme $a = 3$, alors $|a| = 3$ et $\arg(a) = 0$; d'où, d'après la question précédente, $a' = (2-3)e^0 = -1$.

Par conséquent, **l'affixe a' du point A' , image par f du point A d'affixe 3, est -1 .**

3) a) $|\sqrt{3} + i| = \sqrt{3+1} = 2$, alors $b = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$.

Donc, $b = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

b) D'après la question 1), $b' = (2-2)e^{i\frac{5\pi}{6}} = 0$.

Par conséquent, **l'affixe b' du point B' , image par f du point B , est 0.**

4) Voir la figure à la fin de l'exercice.

5) a) Soit M un point, d'affixe z , du plan privé du point O .

$f(M) = O$ équivaut à $\begin{cases} z \neq 0 \\ \frac{z}{|z|}(2-|z|) = 0 \end{cases}$, c'est-à-dire à $|z| = 2$.

Donc, l'ensemble E des points M du plan privé de O dont l'image par f est O est le cercle de centre O et de rayon 2.

b) Voir page suivante.

6) a) Soit M un point, d'affixe z , du plan privé du point O .

$f(M) = M$ équivaut à $\begin{cases} z \neq 0 \\ \frac{z}{|z|}(2-|z|) = z \end{cases}$, c'est-à-dire à $\begin{cases} z \neq 0 \\ 2-|z| = z \times \frac{|z|}{z} \end{cases}$, soit $\begin{cases} z \neq 0 \\ 2-|z| = |z| \end{cases}$.

Donc, $f(M) = M$ équivaut à $\begin{cases} z \neq 0 \\ |z| = 1 \end{cases}$.

Par conséquent, l'ensemble des points M du plan privé de O dont l'image par f est M est le cercle C_1 .

7) Soit M un point du plan distinct de O , d'affixe z , n'appartenant pas au cercle C_1 .

a) I a pour affixe $\frac{z+z'}{2} = \frac{ze^{i\alpha} + (2-r)e^{i\alpha}}{2} = e^{i\alpha}$.

D'où $OI = |z_I| = |e^{i\alpha}| = 1$. On en déduit que **I appartient au cercle C_1 .**

b) $(\overline{OI}, \overline{OM}) = \arg\left(\frac{z_{OM}}{z_{OI}}\right) = \arg\left(\frac{re^{i\alpha}}{e^{i\alpha}}\right) = \arg(r) = 0$ car r est un réel strictement positif.

Par conséquent, les vecteurs \overline{OI} et \overline{OM} sont colinéaires et de même sens.

I appartient alors à la demi-droite $[OM)$.

c) Construisons d'abord le point I : d'après les questions 7) a) et 7) b), le point I est le point d'intersection du cercle C_1 et de la demi-droite $[OM_1)$.

Comme I est le milieu de $[M_1M'_1]$, alors on construit le symétrique de M_1 par rapport à I pour obtenir le point M'_1 .

