

# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2007

## MATHÉMATIQUES

Série S

### ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 4 heures – Coefficient : 9

La page 6/6 est à rendre agrafée dans la copie.

*Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,  
conformément à la réglementation en vigueur.*

*Du papier millimétré est mis à la disposition du candidat.*

**Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.**

**Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.  
Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.**

## EXERCICE 1 (6 points)

Soient  $f$  et  $g$  les fonctions définies sur l'intervalle  $]0, +\infty[$  par :  $f(x) = \ln x$  et  $g(x) = (\ln x)^2$ .

On note  $C$  et  $C'$  les courbes représentatives respectives de  $f$  et  $g$  dans un repère orthogonal.

Les courbes  $C$  et  $C'$  sont données en annexe, page 6.

1. a) Étudier le signe de  $(\ln x)(1 - \ln x)$  sur  $]0, +\infty[$ .  
b) En déduire la position relative des deux courbes  $C$  et  $C'$  sur  $]0, +\infty[$ .
2. Pour  $x$  appartenant à  $]0, +\infty[$ ,  $M$  est le point de  $C$  d'abscisse  $x$  et  $N$  est le point de  $C'$  de même abscisse.  
a) Soit  $h$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $h(x) = f(x) - g(x)$ .  
Étudier les variations de la fonction  $h$  sur  $]0, +\infty[$ .  
b) En déduire que sur l'intervalle  $[1, e]$ , la valeur maximale de la distance  $MN$  est obtenue pour  $x = \sqrt{e}$ .  
c) Résoudre dans  $]0, +\infty[$  l'équation  $(\ln x)^2 - \ln x = 1$ .  
d) En déduire que, sur  $]0, 1[ \cup ]e, +\infty[$ , il existe deux réels  $a$  et  $b$  ( $a < b$ ) pour lesquels la distance  $MN$  est égale à 1.
3. a) À l'aide d'une intégration par parties, calculer  $\int_1^e \ln x \, dx$ .  
b) Vérifier que la fonction  $G$  définie sur  $]0, +\infty[$  par  $G(x) = x[(\ln x)^2 - 2 \ln x + 2]$  est une primitive de la fonction  $g$  sur  $]0, +\infty[$ .  
c) On considère la partie du plan délimitée par les courbes  $C$ ,  $C'$  et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = e$ .  
Déterminer l'aire  $A$  en unités d'aire de cette partie du plan.

## EXERCICE 2 (5 points)

Pour chacune des 5 propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ .

On considère la transformation du plan qui à tout point d'affixe  $z$  associe le point d'affixe  $z'$  définie par :  $z' = 2iz + 1$ .

✓ **Proposition 1** : « Cette transformation est la similitude directe de centre A d'affixe  $\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$ , d'angle  $\frac{\pi}{2}$  et de rapport 2 ».

∩ 2. Dans l'espace muni du repère orthonormal  $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on note  $S$  la surface d'équation  $z = x^2 + 2x + y^2 + 1$ .

**Proposition 2** : « La section de  $S$  avec le plan d'équation  $z = 5$  est un cercle de centre A de coordonnées  $(-1, 0, 5)$  et de rayon 5 ».

✓ 3. **Proposition 3** : «  $5^{750} - 1$  est un multiple de 7 ».

✓ 4. **Proposition 4** : « Si un entier naturel  $n$  est congru à 1 modulo 7 alors le PGCD de  $3n + 4$  et de  $4n + 3$  est égal à 7 ».

✓ 5. Soient  $a$  et  $b$  deux entiers naturels.

**Proposition 5** : « S'il existe deux entiers relatifs  $u$  et  $v$  tels que  $au + bv = 2$  alors le PGCD de  $a$  et  $b$  est égal à 2 ».

### EXERCICE 3 (4 points)

On considère deux urnes  $U_1$  et  $U_2$ .

L'urne  $U_1$  contient 17 boules blanches et 3 boules noires indiscernables au toucher.

L'urne  $U_2$  contient 1 boule blanche et 19 boules noires indiscernables au toucher.

On réalise des tirages en procédant de la manière suivante :

Étape 1 : On tire au hasard une boule dans  $U_1$ , on note sa couleur et on la remet dans  $U_1$ .

Étape  $n$  ( $n \geq 2$ ) :

- Si la boule tirée à l'étape  $(n-1)$  est blanche, on tire au hasard une boule dans  $U_1$ , on note sa couleur et on la remet dans  $U_1$ .
- Si la boule tirée à l'étape  $(n-1)$  est noire, on tire au hasard une boule dans  $U_2$ , on note sa couleur et on la remet dans  $U_2$ .

On note  $A_n$  l'événement « le tirage a lieu dans l'urne  $U_1$  à l'étape  $n$  » et  $p_n$  sa probabilité.

On a donc  $p_1 = 1$ .

1. Calculer  $p_2$ .
2. Montrer que pour tout  $n$  entier naturel non nul,  $p_{n+1} = 0,8 p_n + 0,05$ .  
On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
3. Calculer  $p_3$ .
4. a) Démontrer par récurrence que pour tout entier  $n$  entier naturel non nul,  $p_n > 0,25$ .  
b) Démontrer que la suite  $(p_n)$  est décroissante.  
c) En déduire que la suite  $(p_n)$  est convergente vers un réel noté  $\ell$ .  
d) Justifier que  $\ell$  vérifie l'équation :  $\ell = 0,8 \ell + 0,05$ . En déduire la valeur de  $\ell$ .

## EXERCICE 4 (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct  $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ .

On considère l'application  $f$  qui à tout point  $M$  d'affixe  $z$  non nulle associe le point

$$M' = f(M) \text{ d'affixe } z' \text{ tel que : } z' = \frac{z}{|z|}(2 - |z|).$$

Le cercle  $C_1$ , de centre  $O$  et de rayon 1, est représenté sur la figure, donnée en annexe page 6, que l'on complétera au fur et à mesure des questions.

Pour  $z$  complexe non nul, on note  $z = r e^{i\alpha}$ ,  $r$  étant le module de  $z$  et  $\alpha$  un argument de  $z$ .

1. Montrer que  $z' = (2 - r) e^{i\alpha}$ .
2. Déterminer l'affixe  $a'$  du point  $A'$ , image par  $f$  du point  $A$  d'affixe  $a = 3$ .
3. Soit  $B$  le point d'affixe  $b = -\sqrt{3} + i$ .
  - a) Écrire  $b$  sous forme exponentielle.
  - b) Déterminer l'affixe  $b'$  du point  $B'$ , image du point  $B$  par  $f$ .
4. Placer  $A$ ,  $B$ ,  $A'$  et  $B'$  sur la figure.
5.
  - a) Déterminer l'ensemble  $E$  des points  $M$  du plan privé du point  $O$  dont l'image par  $f$  est  $O$ .
  - b) Représenter  $E$  sur la figure.
6. Montrer que le cercle  $C_1$  est l'ensemble des points  $M$  du plan distincts de  $O$  tels que  $f(M) = M$ .
7. Pour cette question,  $M$  est un point du plan, distinct de  $O$ , n'appartenant pas au cercle  $C_1$ .

On appelle  $I$  le milieu du segment  $[MM']$  où  $M'$  est l'image de  $M$  par  $f$ .

- a) Montrer que  $I$  appartient à  $C_1$ .
- b) Montrer que  $I$  appartient à la demi-droite  $[OM)$ .
- c) Sur la figure donnée en annexe est placé un point nommé  $M_1$ .

Construire le point  $M'_1$ , image par  $f$  du point  $M_1$ .