

# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2007

## MATHÉMATIQUES

- Série S -

### ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

*Durée de l'épreuve : 4 heures*

*Coefficient : 9*

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,  
conformément à la réglementation en vigueur.

*Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.*

*Le sujet comporte deux annexes à rendre avec la copie.*

*Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées de 1 à 5.*

**EXERCICE 1** (5 points)

*Commun à tous les candidats*

Les parties **1)** et **2)** portent sur un même thème, la dérivation, mais sont indépendantes.

**1) Restitution organisée de connaissances**

La formule donnant la dérivée du produit de deux fonctions dérivables est supposée connue.

On a énoncé ci-dessous deux propositions désignées par  $P$  et  $Q$ . Dire pour chacune d'elles si elle est vraie ou fausse et justifier.

Dans cet exercice  $n$  désigne un entier naturel strictement supérieur à 1.

$P$  : Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbf{R}$  par  $f(x) = x^n$ ; alors  $f$  est dérivable sur  $\mathbf{R}$ , de dérivée  $f'$  donnée sur  $\mathbf{R}$  par :  $f'(x) = n x^{n-1}$ .

$Q$  : Soit  $u$  une fonction dérivable sur  $\mathbf{R}$  et soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbf{R}$  par  $f = u^n$ ; alors  $f$  est dérivable sur  $\mathbf{R}$ , de dérivée  $f'$  donnée par  $f' = n u^{n-1}$ .

**2)** On désigne par  $g$  la fonction définie sur  $] -1 ; 1[$  par  $g(0) = 0$  et  $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ , où  $g'$  désigne la dérivée de la fonction  $g$  sur  $] -1 ; 1[$ ; on ne cherchera pas à expliciter  $g(x)$ .

On considère alors la fonction composée  $h$  définie sur  $] -\pi ; 0[$  par  $h(x) = g(\cos x)$ .

**a)** Démontrer que pour tout  $x$  de  $] -\pi ; 0[$  on a  $h'(x) = 1$ , où  $h'$  désigne la dérivée de  $h$ .

**b)** Calculer  $h\left(-\frac{\pi}{2}\right)$  puis donner l'expression de  $h(x)$ .

**EXERCICE 2** (6 points)

*Commun à tous les candidats*

- 1) La suite  $u$  est définie par :  $u_0 = 2$  et  $u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + \frac{23}{27}$  pour tout entier naturel  $n$ .
- a) On a représenté dans un repère orthonormé direct du plan *en annexe 1*, la droite d'équation  $y = \frac{1}{3}x + \frac{23}{27}$  et le point A de coordonnées (2 ; 0). Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite  $u$ .
- b) Démontrer que si la suite  $u$  est convergente alors sa limite est  $\ell = \frac{23}{18}$ .
- c) Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  on a :  $u_n \geq \frac{23}{18}$ .
- d) Étudier la monotonie de la suite  $u$  et donner sa limite.
- 2) a) Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 1. Démontrer que :
- $$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{90} \left(1 - \frac{1}{10^n}\right) \text{ c'est-à-dire que } \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots + \frac{1}{10^{n+1}} = \frac{1}{90} \left(1 - \frac{1}{10^n}\right).$$
- b) La suite  $v$  est définie par  $v_n = 1,2777\dots 7$  avec  $n$  décimales consécutives égales à 7.
- Ainsi  $v_0 = 1,2$ ,  $v_1 = 1,27$  et  $v_2 = 1,277$ .
- En utilisant le a) démontrer que la limite de la suite  $v$  est un nombre rationnel  $r$  (c'est-à-dire le quotient de deux entiers).
- 3) La suite  $u$  définie au 1) et la suite  $v$  sont-elles adjacentes ? Justifier.

**EXERCICE 3** (5 points)

*Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*

1) On considère l'ensemble  $A_7 = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

- a) Pour tout élément  $a$  de  $A_7$  écrire dans le tableau figurant *en annexe 2* l'unique élément  $y$  de  $A_7$  tel que  $ay \equiv 1$  (modulo 7).
- b) Pour  $x$  entier relatif, démontrer que l'équation  $3x \equiv 5$  (modulo 7) équivaut à  $x \equiv 4$  (modulo 7).
- c) Si  $a$  est un élément de  $A_7$ , montrer que les seuls entiers relatifs  $x$  solutions de l'équation  $ax \equiv 0$  (modulo 7) sont les multiples de 7.

2) Dans toute cette question,  $p$  est un nombre premier supérieur ou égal à 3.

On considère l'ensemble  $A_p = \{1 ; 2 ; \dots ; p - 1\}$  des entiers naturels non nuls et strictement inférieurs à  $p$ . Soit  $a$  un élément de  $A_p$ .

- a) Vérifier que  $a^{p-2}$  est une solution de l'équation  $ax \equiv 1$  (modulo  $p$ ).
- b) On note  $r$  le reste dans la division euclidienne de  $a^{p-2}$  par  $p$ . Démontrer que  $r$  est l'unique solution  $x$  dans  $A_p$  de l'équation  $ax \equiv 1$  (modulo  $p$ ).
- c) Soient  $x$  et  $y$  deux entiers relatifs. Démontrer que  $xy \equiv 0$  (modulo  $p$ ) si et seulement si  $x$  est un multiple de  $p$  ou  $y$  est un multiple de  $p$ .
- d) Application :  $p = 31$ .

Résoudre dans  $A_{31}$  les équations :  $2x \equiv 1$  (modulo 31) et  $3x \equiv 1$  (modulo 31).

À l'aide des résultats précédents, résoudre dans  $\mathbf{Z}$  l'équation  $6x^2 - 5x + 1 \equiv 0$  (modulo 31).

**EXERCICE 4** (4 points)

*Commun à tous les candidats*

On considère les deux équations différentielles suivantes définies sur  $\left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right[$  :

$$(E) \quad y' + (1 + \tan x)y = \cos x$$

$$(E_0) \quad y' + y = 1.$$

1) Donner l'ensemble des solutions de l'équation  $(E_0)$ .

2) Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions dérivables sur  $\left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right[$  et telles que  $f(x) = g(x) \cos x$ .

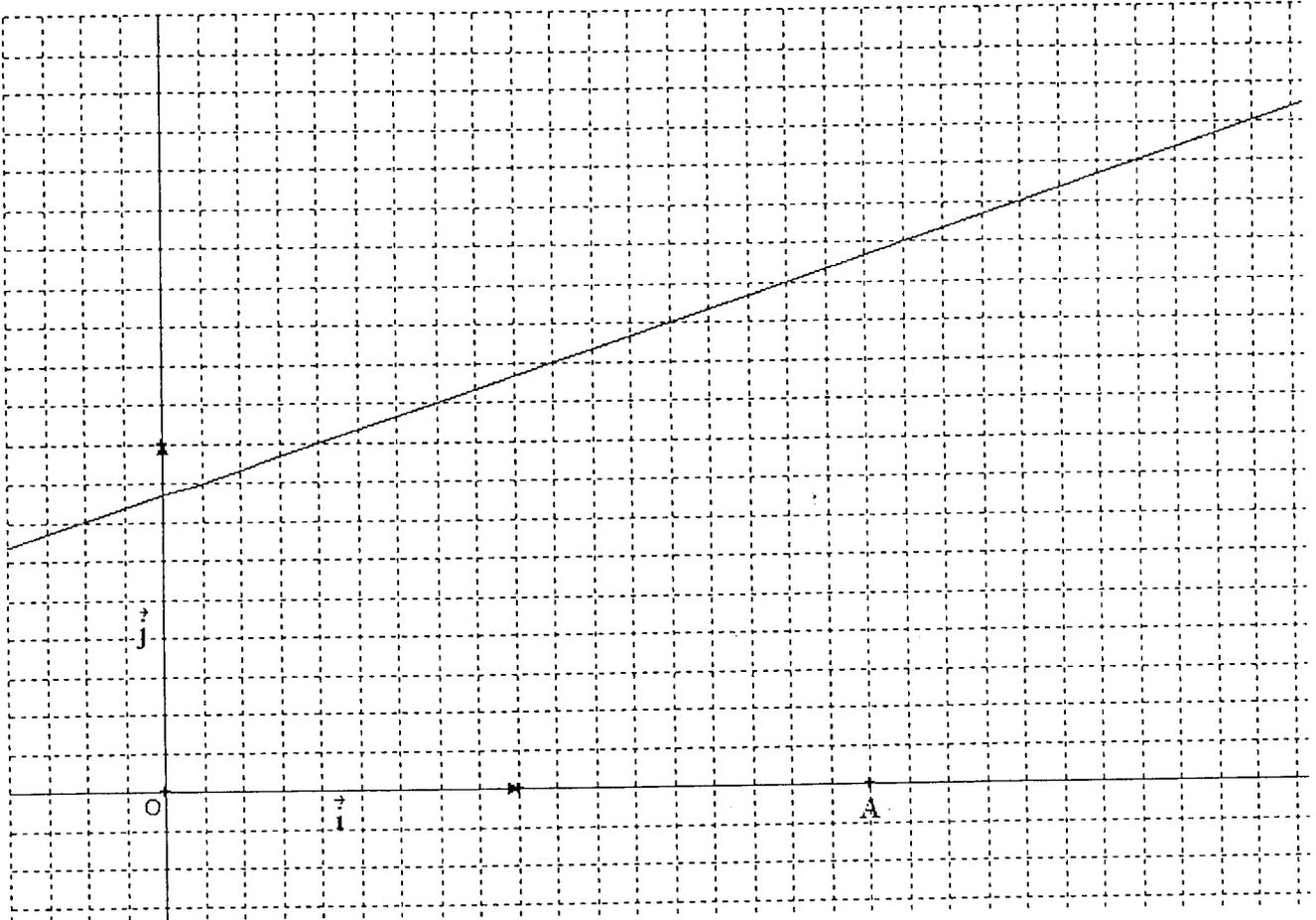
Démontrer que la fonction  $f$  est solution de  $(E)$  si et seulement si la fonction  $g$  est solution de  $(E_0)$ .

3) Déterminer la solution  $f$  de  $(E)$  telle que  $f(0) = 0$ .

# ANNEXE 1

(À compléter et à rendre avec la copie)

## EXERCICE 2



## ANNEXE 2

*(À compléter et à rendre avec la copie)*

### EXERCICE 3

$a$	1	2	3	4	5	6
$y$						6