BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2008

MATHÉMATIQUES

Série : **ES**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures.** – COEFFICIENT : **5**

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter tous les exercices.
Il est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 *(3 points)*

Commun à tous les candidats.

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des six questions, trois réponses sont proposées ; une seule de ces réponses convient.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse exacte sans justifier le choix effectué.

Barème : Une réponse exacte rapporte 0,5 point. Une réponse inexacte ou une absence de réponse n'apporte et n'enlève aucun point.

1. $e^{-2\ln 3}$ est égal à :

   - $\dfrac{2}{3}$
   - $\dfrac{1}{9}$
   - 9

2. L'ensemble des solutions dans **R** de l'inéquation $e^{3x} - 1 \geq 0$ est l'intervalle :

   - $[0;+\infty[$
   - $[1;+\infty[$
   - $\left[\dfrac{1}{3};+\infty\right[$

3. Une primitive de la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x) = \ln x + 1$ est :

   - $x \mapsto x\ln x + x$
   - $x \mapsto x\ln x$
   - $x \mapsto \dfrac{1}{x}$

4. Le prix TTC (toutes taxes comprises) d'un article est 299 €. Sachant que le taux de la TVA est de 19,6%, son prix HT (hors taxes) est :

   - 240,40 €
   - 250 €
   - 279,40 €

5. Lors d'une expérience aléatoire, on considère deux événements indépendants A et B tels que P(A) = 0,6 et P(B) = 0,2.
   On a alors :

   - $P(A \cup B) = 0{,}8$
   - $P(A \cup B) = 0{,}68$
   - $P(A \cup B) = 0{,}92$

6. $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique telle que : $U_0 = 2$ et $U_8 = 32$.
   Sa raison est égale à :

   - $\sqrt{2}$
   - 2
   - 4

Exercice 2 *(5 points)*

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

On considère un groupe de 2000 lecteurs, tous abonnés à une des revues : la Drosera, l'Iguane ou le Nénuphar. Chacun d'eux n'est abonné qu'à une revue et ne lit que celle-là.
Parmi ces abonnés :

- 400 abonnés lisent la Drosera, et 20% des abonnés à la Drosera sont des femmes ;
- 700 abonnés lisent l'Iguane et 30% des abonnés à l'Iguane sont des femmes ;
- les autres abonnés lisent le Nénuphar et 60% des abonnés au Nénuphar sont des femmes.

On choisit un lecteur au hasard parmi ces abonnés.
On note par D, I, N, F et H les événements suivants :

D : « l'abonné lit la Drosera » ;
I : « l'abonné lit l'Iguane » ;
N : « l'abonné lit le Nénuphar » ;
F : « l'abonné est une femme » ;
H : « l'abonné est un homme ».

1. Traduire les données de l'exercice à l'aide d'un arbre de probabilité.
2. *a.* Calculer la probabilité que l'abonné soit une femme lisant la Drosera.

   b. Calculer la probabilité que l'abonné soit une femme lisant l'Iguane.

   c. Démontrer que la probabilité que l'abonné soit une femme est égale à 0,415.

3. Sachant que l'abonné choisi est une femme, calculer la probabilité qu'il soit lecteur de la Drosera *(le résultat sera donné sous forme décimale, arrondi au millième).*
4. On interroge au hasard et de façon indépendante trois abonnés.

Quelle est la probabilité qu'aucun des abonnés ne soit une femme lectrice du Nénuphar *(le résultat sera donné sous forme décimale, arrondi au millième)* ?

Exercice 3 *(6 points)*

Commun à tous les candidats.

On considère la fonction f définie sur l'ensemble **R** des nombres réels par $f(x) = \mathrm{e}^{x-1} + x - 1$.
On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(\mathrm{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité graphique 1 cm.

Partie A

1. Calculer $f(0)$ et $f(1)$. *On donnera les valeurs exactes.*
2. *a.* Calculer la limite de f en $-\infty$.

   b. Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}$.
3. Calculer la limite de f en $+\infty$.

Partie B

1. *a.* On note f' la fonction dérivée de f. Calculer $f'(x)$ pour tout x réel et étudier son signe sur **R**.

   b. Dresser le tableau de variations de f sur **R**.
2. *a.* Montrer que sur l'intervalle $[0 ; 1]$ l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α.

   b. Donner une valeur, arrondie au centième, de α.

   c. Préciser le signe de $f(x)$ selon les valeurs du réel x.
3. Tracer la droite $\mathcal{D}$ et la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $(\mathrm{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Partie C

1. Déterminer une primitive F de la fonction f sur **R**.
2. Calculer l'intégrale $\mathrm{I} = \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

   Donner la valeur exacte de I, puis une valeur décimale arrondie au centième.

   Donner une interprétation graphique de cette intégrale.

Exercice 4 *(6 points)*

Commun à tous les candidats.

Le tableau suivant donne l'évolution de la population de l'Inde de 1951 à 1991.

année	1951	1961	1971	1981	1991
Rang x_i	1	2	3	4	5
Population y_i (en millions)	361	439	548	683	846
z_i					

On cherche à étudier l'évolution de la population y, exprimée en millions d'habitants, en fonction du rang x de l'année.

1. Représenter graphiquement le nuage de points $(x_i\,;y_i)$ dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unités graphiques 1cm pour 1 sur l'axe des abscisses et 1cm pour 100 millions sur l'axe des ordonnées.
2. *a.* À l'aide de la calculatrice, déterminer un ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés.

   b. En utilisant cet ajustement, déterminer la population de l'Inde que l'on pouvait prévoir pour 2001, c'est-à-dire pour $x = 6$ (*le résultat sera arrondi au million*).
3. On cherche un autre ajustement et on se propose d'utiliser le changement de variable suivant : $z = \ln y$.

   a. Recopier le tableau ci-dessus et compléter la dernière ligne (*les valeurs seront arrondies au millième)*.

   b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un ajustement affine de z en fonction de x par la méthode des moindres carrés (*les coefficients seront arrondis au millième*).

   c. En déduire qu'une approximation de la population y, exprimée en millions d'habitants, en fonction du rang x de l'année est donnée par : $y \approx 289\ \mathrm{e}^{0,215\,x}$.

   d. En utilisant cet ajustement, calculer la population que l'on pouvait prévoir pour 2001 (*le résultat sera arrondi au million*).
4. Les résultats obtenus en 2001 ont révélé que la population comptait 1027 millions d'habitants. Déterminer une estimation de la population, arrondie au million d'habitants, en 2011 en choisissant le modèle qui semble le plus approprié. Justifier ce choix.