BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2008

MATHÉMATIQUES

- Série ES -

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient : 7

SPECIALITE

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

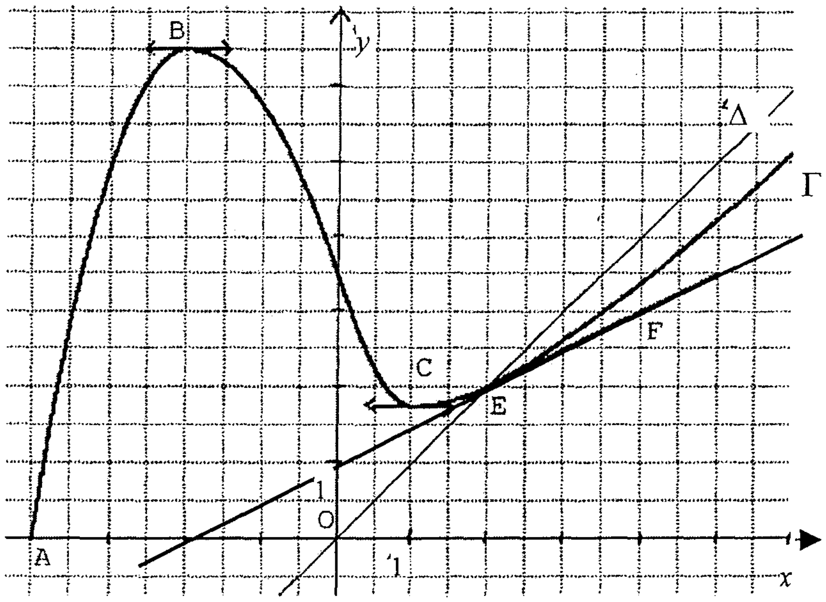
Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 4 pages numérotées de 1 à 4.

EXERCICE 1 **(4 points)**

Commun à tous les candidats

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-4\ ;\ 6]$. On note f' sa fonction dérivée. La courbe Γ représentative de la fonction f dans un repère orthonormal est tracée ci-dessous ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$. La courbe Γ et la droite Δ se coupent au point E d'abscisse 2. On sait par ailleurs que :

- la courbe Γ admet des tangentes parallèles à l'axe des abscisses aux points B $(-2\ ;\ 6{,}5)$ et C$(1\ ;\ 1{,}75)$,
- la droite (EF) est la tangente à la courbe Γ au point E ; F est le point de coordonnées $(4\ ;\ 3)$



1) Dans cette question, déterminer par lecture graphique et sans justification :

a) les valeurs de $f'(-2)$ et $f'(2)$;

b) les valeurs de x dans l'intervalle $[-4\ ;\ 6]$ vérifiant $f'(x) \geqslant 0$;

c) les valeurs de x dans l'intervalle $[-4\ ;\ 6]$ vérifiant $f(x) \leqslant x$.

2) Soit g la fonction définie sur $]-4\ ;\ 6]$ par $g(x) = \ln\left[f(x)\right]$. Déterminer par lecture graphique et avec justification :

a) les variations de g ;

b) la limite de la fonction g quand x tend vers -4.

3) Encadrement d'une intégrale

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.

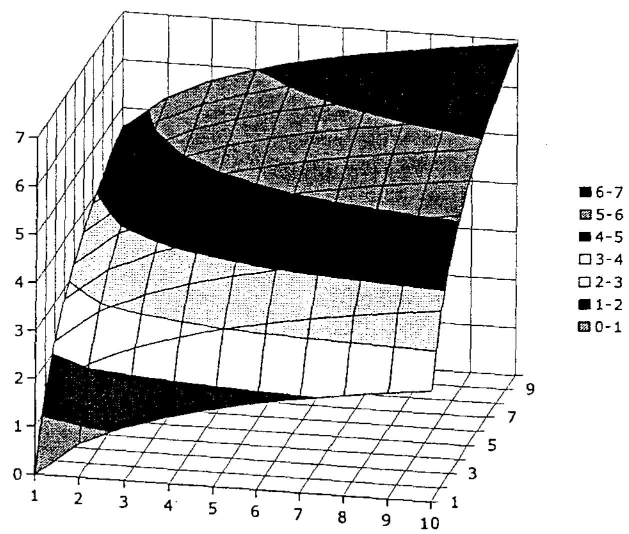
a) Soit l'intégrale $I = \int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$. Interpréter graphiquement I.

b) Proposer un encadrement de l'intégrale I par deux nombres entiers consécutifs. Justifier.

EXERCICE 2 **(5 points)**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Une consommatrice apprécie deux types de fruits $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. En un mois, elle achète x kilos de fruits $\mathcal{A}$ et y kilos de fruits $\mathcal{B}$; x et y appartiennent à l'intervalle [1 ; 10].
Son niveau de satisfaction est modélisé par la relation $f(x;y) = \ln y + 2\ln x$
La figure ci-dessous représente, dans un repère orthogonal, la surface d'équation $z = f(x;y)$ pour $1 \leqslant x \leqslant 10$ et $1 \leqslant y \leqslant 10$.



1) Le point N, d'ordonnée 5 et de cote ln 30, appartient à la surface. Calculer la valeur exacte de son abscisse.

2) On peut estimer que le kilo de fruits $\mathcal{A}$ coûte 3 euros et que celui de fruits $\mathcal{B}$ coûte 2 euros. La consommatrice décide de ne pas dépenser plus de 36 euros par mois pour ces fruits.

a) Donner la relation entre les quantités x et y de fruits $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ achetées pour un montant de 36 euros.

b) Montrer qu'alors le niveau de satisfaction de la consommatrice est égal à $\ln(18-1,5x)+2\ln x$.

c) Démontrer que, sur l'intervalle [1 ; 10], la fonction g définie par $g(x) = \ln(18-1,5x)+2\ln x$ admet un maximum pour une valeur x_0 que l'on précisera.

d) Quelles quantités de fruits $\mathcal{A}$ et de fruits $\mathcal{B}$ la consommatrice doit-elle acheter dans le mois si elle veut optimiser son niveau de satisfaction tout en respectant sa contrainte de budget ?

EXERCICE 3 **(7 points)**

Commun à tous les candidats

Partie A : Etude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(x)=(x+8)\,e^{-0,5x}$.
On note f' sa fonction dérivée et on admet que, pour tout x de $[0\,;+\infty[$, on a :

$f'(x)=(-0,5x-3)\,e^{-0,5x}$.

1) Étudier le sens de variation de la fonction f sur $[0\,;+\infty[$.

2) Démontrer que la fonction F définie sur $[0\,;+\infty[$ par $F(x)=(-2x-20)\,e^{-0,5x}$ est une primitive de f sur ce même intervalle.

3) Calculer l'intégrale $\mathrm{I}=\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$; on donnera la valeur arrondie à 0,01 près.

Partie B : Applications économiques

La fonction de demande d'un produit informatique est modélisée par la fonction f étudiée dans la partie A. Le nombre $f(x)$ représente la quantité demandée, exprimée en milliers d'objets, lorsque le prix unitaire est égal à x centaines d'euros.

1) Calculer le nombre d'objets demandés, à l'unité près, lorsque le prix unitaire est fixé à 200 euros.

2) En utilisant les résultats de la partie A, déterminer la demande moyenne à 10 objets près, lorsque le prix unitaire est compris entre 200 et 400 euros.

3) L'élasticité $E(x)$ de la demande par rapport au prix x est le pourcentage de variation de la demande pour une augmentation de 1% de x. On admet qu'une bonne approximation de $E(x)$ est donnée par :

$$E(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}\times x.$$

a) Démontrer que $E(x)=\dfrac{-0,5x^2-3x}{x+8}$.

b) Déterminer le signe de $E(x)$ sur $[0\,;+\infty[$ et interpréter ce résultat.

c) Calculer le prix pour lequel l'élasticité est égale à $-3,5$. Comment évolue la demande lorsque le prix passe de 800 à 808 euros ?

EXERCICE 4 **(4 points)**

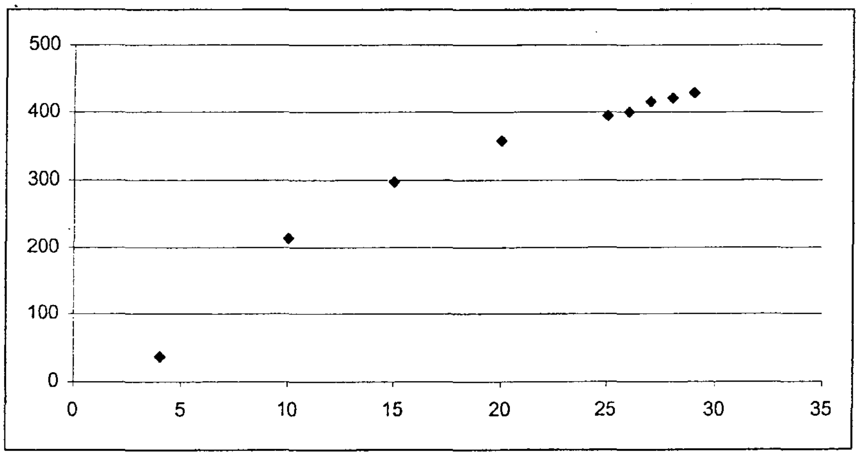
Commun à tous les candidats

Le tableau ci-dessous donne la production d'électricité d'origine nucléaire en France, exprimée en milliards de kWh, entre 1979 et 2004. Les rangs des années sont calculés par rapport à l'année 1975.

Année	1979	1985	1990	1995	2000	2001	2002	2003	2004
Rang de l'année x_i	4	10	15	20	25	26	27	28	29
Production y_i	37,9	213,1	297,9	358,8	395,2	401,3	416,5	420,7	427,7

Source : site Internet ministère de l'industrie

Ces données sont représentées par le nuage de points ci-dessous :



A - Recherche d'un ajustement affine

1) Donner à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés (*les coefficients seront arrondis au dixième*).

2) **a)** D'après cet ajustement, quelle serait la production d'électricité nucléaire en France en 2005 ?

b) En réalité, en 2005, la production d'électricité nucléaire a été de 430 milliards de kWh. Calculer le pourcentage de l'erreur commise par rapport à la valeur réelle, arrondi à 0,1 % près, lorsqu'on utilise la valeur fournie par l'ajustement affine.

B – Un autre modèle

Compte tenu de l'allure du nuage de points, on choisit un ajustement logarithmique et on modélise la production d'électricité nucléaire par la fonction f définie pour tout x de $[4\,;+\infty[$ par : $f(x) = 197 \ln x - 237$.

1) Calculer la production d'électricité nucléaire prévisible avec ce modèle pour l'année 2005. Quelle conclusion peut-on en tirer ?

2) **a)** Résoudre dans $[4\,;+\infty[$ l'inéquation $f(x) \geqslant 460$.

b) Avec ce modèle, en quelle année peut-on prévoir que la production d'énergie nucléaire dépassera 460 milliards de kWh ?