BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2008

MATHÉMATIQUES

Série : **ES**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 3 heures. – COEFFICIENT : 7

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter tous les exercices.
Il est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 *(3 points)*

Commun à tous les candidats.

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des six questions, trois réponses sont proposées ; une seule de ces réponses convient.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse exacte sans justifier le choix effectué.
Barème : Une réponse exacte rapporte 0,5 point. Une réponse inexacte ou une absence de réponse n'apporte et n'enlève aucun point.

1. $e^{-2\ln 3}$ est égal à :

   - $\frac{2}{3}$
   - $\frac{1}{9}$
   - 9

2. L'ensemble des solutions dans **R** de l'inéquation $e^{3x}-1 \geq 0$ est l'intervalle :

   - $[0;+\infty[$
   - $[1;+\infty[$
   - $\left[\frac{1}{3};+\infty\right[$

3. Une primitive de la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x)=\ln x+1$ est :

   - $x \mapsto x\ln x+x$
   - $x \mapsto x\ln x$
   - $x \mapsto \frac{1}{x}$

4. Le prix TTC (toutes taxes comprises) d'un article est 299 €. Sachant que le taux de la TVA est de 19,6%, son prix HT (hors taxes) est :

   - 240,40 €
   - 250 €
   - 279,40 €

5. Lors d'une expérience aléatoire, on considère deux événements indépendants A et B tels que P(A) = 0,6 et P(B) = 0,2.
   On a alors :

   - $P(A\cup B)=0{,}8$
   - $P(A\cup B)=0{,}68$
   - $P(A\cup B)=0{,}92$

6. $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique telle que : $U_0=2$ et $U_8=32$.
   Sa raison est égale à :

   - $\sqrt{2}$
   - 2
   - 4

Exercice 2 *(5 points)*

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

Partie A

Soit la suite (U_n) définie par la donnée de son premier terme $U_0 = 14000$ et par la relation :

pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = 1,04 \times U_n + 200$.

1. Calculer U_1 et U_2.
2. Pour tout entier naturel n, on pose $V_n = U_n + 5000$.

   a. Calculer V_0.

   b. Exprimer V_{n+1} en fonction de V_n.
   En déduire que la suite (V_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

   c. Exprimer V_n en fonction de n.

   d. En déduire que $U_n = 19000 \times (1,04)^n - 5000$.

Partie B

On suppose que U_n représente le salaire annuel d'une personne pour l'année $2002 + n$, n étant un entier naturel.

1. Calculer le salaire annuel, arrondi à l'euro, de la personne en 2010.
2. *a.* Résoudre dans **R** l'inéquation d'inconnue x : $1,04^x \geq \dfrac{33}{19}$.

   b. À partir de quelle année le salaire annuel de cette personne aura-t-il doublé par rapport à celui de 2002 ?

Exercice 3 *(6 points)*

Commun à tous les candidats.

On considère la fonction f définie sur l'ensemble **R** des nombres réels par $f(x) = e^{x-1} + x - 1$.
On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.

Partie A

1. Calculer $f(0)$ et $f(1)$. *On donnera les valeurs exactes.*
2. *a.* Calculer la limite de f en $-\infty$.

   b. Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}$.
3. Calculer la limite de f en $+\infty$.

Partie B

1. *a.* On note f' la fonction dérivée de f. Calculer $f'(x)$ pour tout x réel et étudier son signe sur **R**.

   b. Dresser le tableau de variations de f sur **R**.
2. *a.* Montrer que sur l'intervalle $[0 ; 1]$ l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α.

   b. Donner une valeur, arrondie au centième, de α.

   c. Préciser le signe de $f(x)$ selon les valeurs du réel x.
3. Tracer la droite $\mathcal{D}$ et la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie C

1. Déterminer une primitive F de la fonction f sur **R**.
2. Calculer l'intégrale $I = \int_1^3 f(x)\,dx$.

   Donner la valeur exacte de I, puis une valeur décimale arrondie au centième.

   Donner une interprétation graphique de cette intégrale.

Exercice 4 *(6 points)*

Commun à tous les candidats.

Le tableau suivant donne l'évolution de la population de l'Inde de 1951 à 1991.

année	1951	1961	1971	1981	1991
Rang x_i	1	2	3	4	5
Population y_i (en millions)	361	439	548	683	846
z_i					

On cherche à étudier l'évolution de la population y, exprimée en millions d'habitants, en fonction du rang x de l'année.

1. Représenter graphiquement le nuage de points $(x_i\,;y_i)$ dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unités graphiques 1cm pour 1 sur l'axe des abscisses et 1cm pour 100 millions sur l'axe des ordonnées.
2. *a.* À l'aide de la calculatrice, déterminer un ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés.

   b. En utilisant cet ajustement, déterminer la population de l'Inde que l'on pouvait prévoir pour 2001, c'est-à-dire pour $x = 6$ (*le résultat sera arrondi au million*).
3. On cherche un autre ajustement et on se propose d'utiliser le changement de variable suivant : $z = \ln y$.

   a. Recopier le tableau ci-dessus et compléter la dernière ligne (*les valeurs seront arrondies au millième*).

   b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un ajustement affine de z en fonction de x par la méthode des moindres carrés (*les coefficients seront arrondis au millième*).

   c. En déduire qu'une approximation de la population y, exprimée en millions d'habitants, en fonction du rang x de l'année est donnée par : $y \approx 289\ \mathrm{e}^{0{,}215\,x}$.

   d. En utilisant cet ajustement, calculer la population que l'on pouvait prévoir pour 2001 (*le résultat sera arrondi au million*).
4. Les résultats obtenus en 2001 ont révélé que la population comptait 1027 millions d'habitants. Déterminer une estimation de la population, arrondie au million d'habitants, en 2011 en choisissant le modèle qui semble le plus approprié. Justifier ce choix.