BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2008

MATHÉMATIQUES

Série : **ES**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures** – COEFFICIENT : **7**

spécialité

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

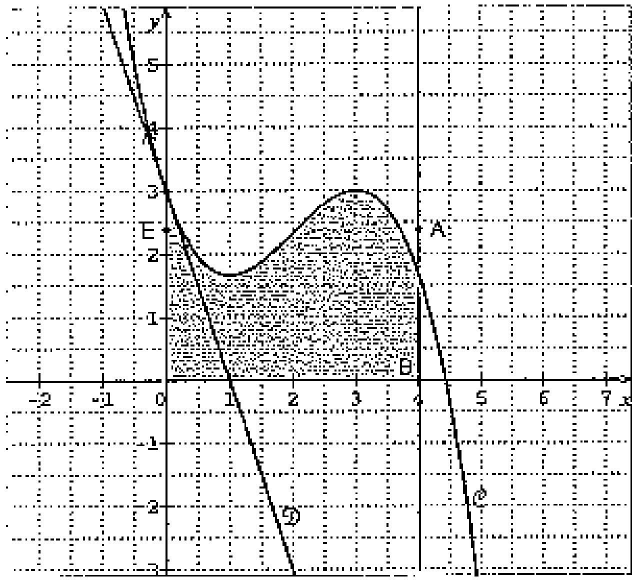
L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter tous les exercices.
Il est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (4 *points*)

Commun à tous les candidats.

Le plan est muni d'un repère orthonormal.
Soient f une fonction définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels et $\mathcal{C}$ sa courbe tracée ci-contre.
La droite $\mathcal{D}$ est la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
On appelle B, A et E les points de coordonnées respectives $(4;0)$, $\left(4\,;\dfrac{179}{75}\right)$ et $\left(0\,;\dfrac{179}{75}\right)$.
Ces trois points n'appartiennent pas à la courbe $\mathcal{C}$.



Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des quatre questions, trois réponses sont proposées ; une seule de ces réponses convient.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse exacte sans justifier le choix effectué.

Barème : Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse inexacte ou une absence de réponse n'apporte et n'enlève aucun point.

1. L'ordonnée à l'origine de la droite $\mathcal{D}$ est égale à :
   - 0.
   - 1.
   - 3.

2. Le nombre dérivé $f'(0)$ est égal à :
   - $\dfrac{-1}{3}$.
   - 5.
   - -3.

3. Sachant que l'aire grisée sur la figure est égale à l'aire du rectangle OBAE, la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0;4]$ est :
   - $\dfrac{179}{75}$.
   - $\dfrac{716}{75}$.
   - $-\dfrac{179}{75}$.

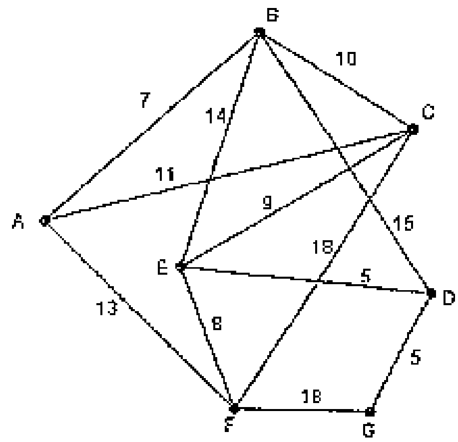
4. Sur l'intervalle $[0;4]$, l'équation $f'(x)=0$:
   - possède deux solutions distinctes.
   - ne possède pas de solution.
   - possède une unique solution.

Exercice 2 (*5 points*)

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

Une grande ville a mis en place un système de location de bicyclettes en libre service. Un abonné peut ainsi louer une bicyclette dans une station puis la déposer dans n'importe quelle station de son choix. La ville compte sept stations de location nommées A, B, C, D, E, F et G.

Les stations sont reliées entre elles par une piste cyclable et les temps de parcours en minutes sont indiqués sur le graphe ci-contre.



1. Philippe, cycliste très prudent, décide de visiter cette ville en n'empruntant que des pistes cyclables.

   a. A-t-il la possibilité d'effectuer un parcours empruntant une fois et une seule toutes les pistes cyclables ? Justifier la réponse.

   b. À la fin de ce parcours, pourra-t-il rendre sa bicyclette dans la station de départ ? Justifier la réponse.

2. On appelle M la matrice associée à ce graphe. On donne deux matrices N et T :

$$N = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 8 & 5 & 5 & 9 & 2 \\ 9 & 6 & 10 & 7 & 10 & 6 & 4 \\ 8 & 10 & 8 & 5 & 10 & 9 & 4 \\ 5 & 7 & 5 & 2 & 8 & 4 & 5 \\ 5 & 10 & 10 & 8 & 6 & 11 & 2 \\ 9 & 6 & 9 & 4 & 11 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 4 & 5 & 2 & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 8 & 4 & 5 & 9 & 1 \\ 9 & 6 & 10 & 6 & 10 & 6 & 4 \\ 8 & 10 & 8 & 4 & 10 & 9 & 4 \\ 5 & 7 & 5 & 2 & 8 & 4 & 5 \\ 5 & 8 & 10 & 8 & 6 & 11 & 0 \\ 9 & 6 & 9 & 4 & 11 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 5 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

   a. Une des deux matrices N ou T est la matrice M^3. Sans calculs, indiquer quelle est la matrice M^3 en justifiant la réponse.

   b. Philippe a loué une bicyclette à la station F et l'a rendue à la station E. Au cours de son déplacement, il est passé exactement deux fois devant une station. Combien de trajets différents a-t-il pu suivre ? Expliquer.

3. Le lendemain, il envisage de rejoindre le plus rapidement possible la station G en partant de la station A. À l'aide d'un algorithme, déterminer un tel parcours et donner alors le temps nécessaire pour l'effectuer.

Exercice 3 (*4 points*)

Commun à tous les candidats.

Le tableau ci-dessous présente l'évolution de l'indice des prix des logements anciens en Ile de France entre 2000 et 2006 (base 100 en 2000).

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Rang x_i de l'année	0	1	2	3	4	5	6
Indice y_i des prix	100	106,3	114,3	126,1	143,6	166,3	181,5

(Source : INSEE)

On cherche à étudier l'évolution de l'indice des prix y en fonction du rang x de l'année.

1. Calculer le taux d'évolution de cet indice entre 2000 et 2006.
2. Représenter le nuage de points $M_i(x_i\,;y_i)$ associé à cette série statistique dans le plan muni d'un repère orthogonal, d'unités graphiques :
   - sur l'axe des abscisses, 2 cm pour un an ;
   - sur l'axe des ordonnées, 1 cm pour 10 (en plaçant 100 à l'origine).

L'allure de ce nuage suggère un ajustement exponentiel.

On pose $z = \ln y$.

3. Recopier et compléter le tableau suivant (*les valeurs de z_i seront arrondies au millième*) :

Rang x_i	0	1	2	3	4	5	6
$z_i = \ln y_i$	4,605						

4. *Dans cette question, les calculs effectués à la calculatrice ne seront pas justifiés.*
   a. Déterminer une équation de la droite d'ajustement de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés (*les coefficients seront arrondis au millième*).
   b. En déduire une approximation de l'indice des prix y en fonction du rang x de l'année.
5. On prend l'approximation $y \approx 96\,e^{0,104x}$ et on suppose qu'elle reste valable pour les années suivantes.
   a. Déterminer le plus petit entier n tel que $96\,e^{0,104n} \geq 250$.
   b. Donner une interprétation du résultat obtenu.

Exercice 4 *(7 points)*

Commun à tous les candidats.

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $g(x) = \ln x + 2x^2 - 3$.

   Le tableau de variation de la fonction g est donné ci-dessous :

x	0	α	$+\infty$
g	$-\infty$	0	$+\infty$

   En utilisant une calculatrice, on a obtenu $\alpha \approx 1{,}19$.

   Dresser le tableau donnant le signe de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{2}{x} - \dfrac{\ln x}{x} + 2x - 5$.

   On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans le repère $(O\,; \vec{i}, \vec{j})$.

   a. Déterminer la limite de la fonction f en 0.

   b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

3. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

   a. Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}.$$

   b. En déduire le sens de variation de f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et dresser son tableau de variations.

   c. Déterminer le signe de $f(x)$ pour tout réel x supérieur ou égal à e.

   Toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

4. Soit h la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $h(x) = (\ln x)^2$.

   a. Calculer la dérivée h' de h.

   b. En remarquant que pour tout x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$, on a : $f(x) = \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{2}h'(x) + 2x - 5$, trouver une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

   c. Déterminer l'aire en unités d'aire de la partie du plan délimitée par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \mathrm{e}$ et $x = \mathrm{e}^2$ *(on donnera la valeur exacte, puis une valeur décimale arrondie au dixième).*