BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2008

MATHÉMATIQUES

Série : **ES**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures.** – COEFFICIENT : 7

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter tous les exercices.
Il est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (*4 points*)

Commun à tous les candidats.

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des quatre questions, quatre réponses sont proposées ; une seule de ces réponses convient.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse exacte sans justifier le choix effectué.

Barème : Une bonne réponse rapporte 1 point. Une réponse inexacte ou une absence de réponse n'apporte et n'enlève aucun point.

1. Le prix d'un produit dérivé du pétrole a augmenté de 60 % durant l'année 2005.
   Pour revenir à sa valeur initiale, ce prix doit baisser de :

   - 70 %.
   - 60 %.
   - 40 %.
   - 37,5 %.

2. Lors d'une expérience aléatoire, on considère deux événements indépendants A et B qui vérifient $P(A) = 0,3$ et $P(B) = 0,5$. On a alors :

   - $P(A \cup B) = 0,65$.
   - $P(A \cup B) = 0,8$.
   - $P(A \cup B) = 0,15$.
   - Les données ne permettent pas de calculer $P(A \cup B)$.

3. f est la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x}$.

   La courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal du plan admet pour asymptote la droite d'équation :

   - $y = 0$.
   - $y = 2x - 1$.
   - $x = 2$.
   - $y = -x + 1$.

4. Le nombre $A = 2\ln\left(\frac{e}{4}\right) + 5\ln 2 + \ln\left(\frac{8}{e}\right)$ est égal à :

   - $1 + 4\ln 2$.
   - $4\ln 2 + 3$.
   - $2\ln 5 + 1$.
   - $8\ln 2$.

Exercice 2 *(5 points)*

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

Afin de diminuer la circulation automobile, une municipalité organise un système de location de vélos à partir de deux relais A et B. La municipalité dispose de 200 vélos. Dans les deux relais, les capacités de parking sont suffisantes pour accueillir l'ensemble de ces vélos. Chaque jour, tous les vélos doivent être rendus dans n'importe lequel des deux points de location avant la fin de la journée.
On a constaté après une période de fonctionnement que chaque jour :

- 80 % des vélos garés le matin au relais A sont garés en fin de journée au relais A, les autres sont garés en fin de journée au relais B.
- 70 % des vélos garés le matin au relais B sont garés en fin de journée au relais B, les autres sont garés en fin de journée au relais A.

Au soir du 31 mars, il y a 100 vélos garés dans chacun des deux relais A et B.
On note :

- A : l'état « le vélo est garé en fin de journée au relais A » ;
- B : l'état « le vélo est garé en fin de journée au relais B» ;
- $P_n = (a_n \quad b_n)$: la matrice ligne donnant l'état probabiliste de la répartition des vélos dans les relais A et B au soir du n-ième jour suivant le 31 mars, avec $a_n + b_n = 1$. On a $P_0 = (0,5 \quad 0,5)$.

1. Tracer un graphe probabiliste représentant la situation décrite ci-dessus.
2. On note M la matrice de transition du graphe probabiliste déterminé à la question 1.

   On a : $M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$.

   a. Déterminer l'état probabiliste de la répartition des vélos au soir du 1er avril.
   b. Déterminer l'état probabiliste de la répartition des vélos au soir du 2 avril.

3. *a.* Montrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0,5\,a_n + 0,3$.
   b. On pose, pour tout entier naturel n : $v_n = a_n - 0,6$.
   Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.
   c. Exprimer v_n en fonction de l'entier naturel n.
   d. Montrer que, pour tout entier n, $a_n = 0,6 - 0,1 \times (0,5)^n$.

4. *a.* Déterminer la limite de la suite (a_n).
   b. On rappelle qu'au soir du 31 mars chaque relais disposait de 100 vélos (soit au total 200 vélos en location). Que peut-on en déduire sur la répartition à long terme des vélos entre les deux relais ?

Exercice 3 (*4 points*)

Commun à tous les candidats.

Un centre d'appel comptait en 2001 soixante-six employés. Le tableau ci-dessous donne l'évolution du nombre d'employés en fonction du rang de l'année.

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7
Nombre d'employés y_i	66	104	130	207	290	345	428

On cherche à étudier l'évolution du nombre y d'employés en fonction du rang x de l'année.
Une étude graphique montre qu'un ajustement affine ne convient pas.

On pose alors $z = \sqrt{y} - 3$.

1. Recopier et compléter le tableau suivant (*on donnera les résultats sous forme décimale, arrondis au centième*).

Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7
z_i	5,12						

2. Représenter le nuage de points $M_i(x_i\,;z_i)$ associé à cette série statistique, dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unité graphique 1 cm.
   Un ajustement affine vous paraît-il approprié ? Justifier la réponse.
3. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement affine de z en x par la méthode des moindres carrés (*on donnera les coefficients sous forme décimale, arrondis au centième)*.
   Tracer cette droite sur le graphique précédent.
4. En utilisant cet ajustement, à partir de quelle année peut-on prévoir que l'effectif de ce centre d'appel dépassera 900 employés ?

Exercice 4 (*7 points*)

Commun à tous les candidats.

Les trois parties sont indépendantes.

On considère la fonction f définie sur l'ensemble $\mathbf{R}$ des nombres réels par $f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{x-1} + c$, où a, b et c sont trois réels que l'on se propose de déterminer dans la partie A.

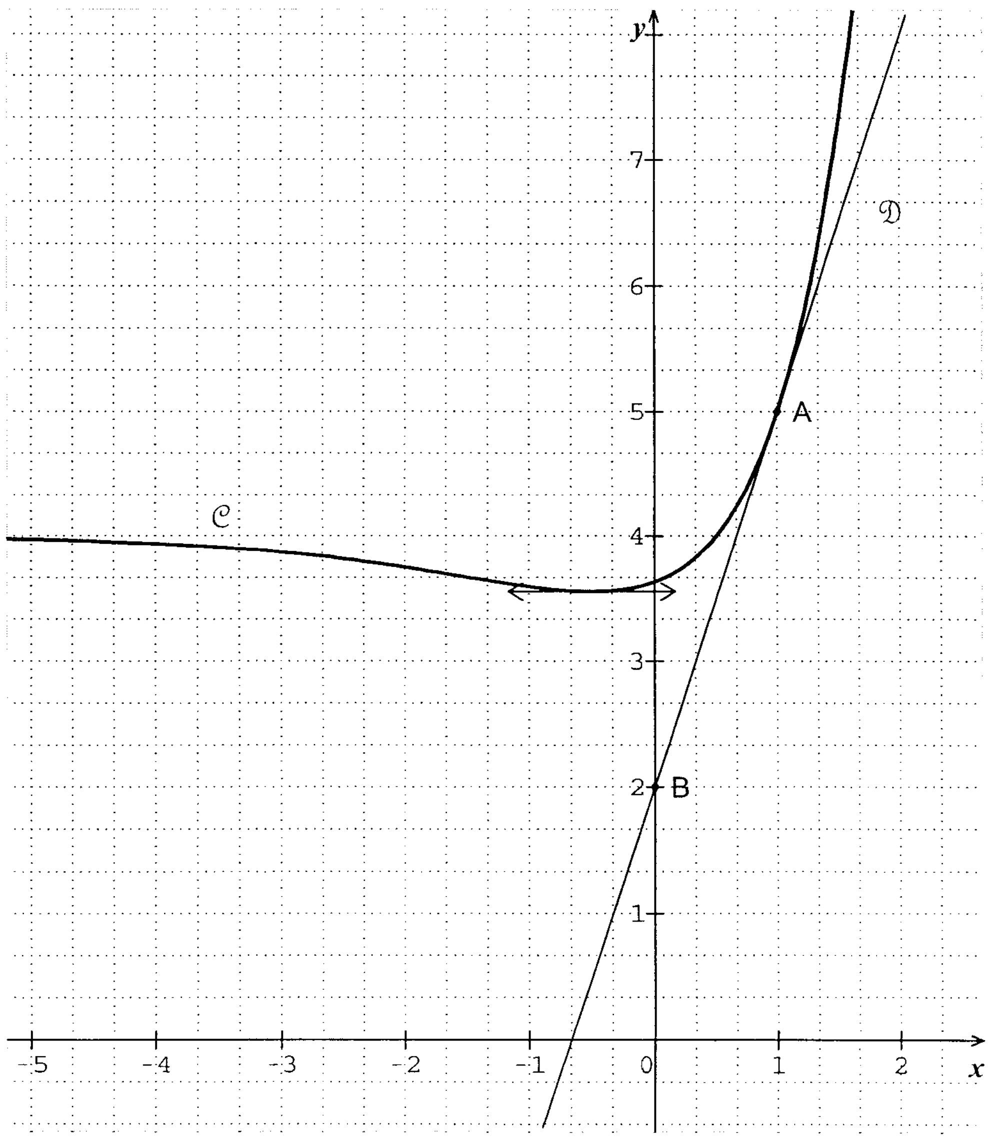
On note f' la fonction dérivée de f.

La courbe $\mathcal{C}$ représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal est représentée ci-dessous.

La courbe $\mathcal{C}$ passe par le point A (1 ; 5), elle admet la droite $\mathcal{D}$ comme tangente en ce point.

Le point B(0 ; 2) appartient à la droite $\mathcal{D}$.

La courbe $\mathcal{C}$ admet également une tangente horizontale au point d'abscisse $-\dfrac{1}{2}$.



PARTIE A

1. *a*. Préciser les valeurs de $f(1)$ et $f'\left(-\frac{1}{2}\right)$.

   b. Déterminer le coefficient directeur de la droite $\mathcal{D}$. En déduire $f'(1)$.

2. Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = (ax + a + b)\,\mathrm{e}^{x-1}$.

3. Montrer que a, b et c vérifient le système : $\begin{cases} a + b + c = 5 \\ a + 2b = 0 \\ 2a + b = 3 \end{cases}$.

   Déterminer les valeurs de a, b et c.

PARTIE B

On admet pour la suite de l'exercice que, pour tout réel x, $f(x) = (2x-1)\,\mathrm{e}^{x-1} + 4$.

1. *a*. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

   b. Vérifier que, pour tout réel x, $f(x) = \frac{2}{\mathrm{e}} x\,\mathrm{e}^{x} - \frac{1}{\mathrm{e}}\mathrm{e}^{x} + 4$.

   En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ (on rappelle que $\lim\limits_{x \to -\infty} x\,\mathrm{e}^{x} = 0$).

   Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$?

2. *a*. Donner, pour tout réel x, l'expression de $f'(x)$.

   b. Établir le tableau de variation de f.

   Déterminer le signe de $f(x)$ pour tout réel x.

   c. Montrer que l'équation $f(x) = 6$ admet une unique solution réelle α sur l'intervalle $[1;2]$. On donnera un encadrement de α d'amplitude 0,1.

   Toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

PARTIE C

1. On considère la fonction F définie pour tout réel x par $F(x) = (2x-3)\,\mathrm{e}^{x-1} + 4x$.

   Montrer que F est une primitive de f sur **R**.

2. Soit Δ la partie du plan située entre la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

   Calculer l'aire de la partie Δ exprimée en unités d'aire ; on donnera la valeur exacte et la valeur décimale arrondie au dixième.