Baccalauréat Mathématiques-Enseignement de spécialité
Polynésie juin 2008

Exercice 1 **4 points**

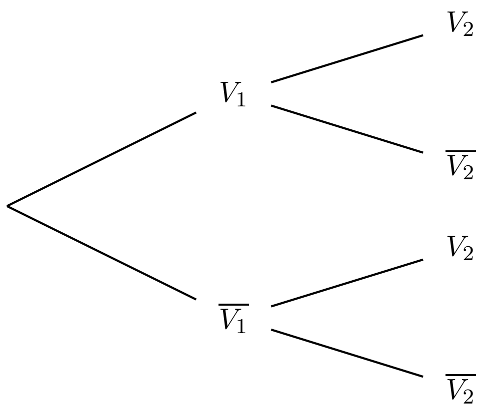
Pour un jeu, on dispose de deux urnes.
La première urne contient 6 boules indiscernables au toucher. Sur chacune de ces boules est écrite une lettre, les 6 lettres permettant de reconstituer le prénom MARGOT.
La seconde urne contient 7 boules indiscernables au toucher. Sur chacune de ces boules est écrite une lettre, les 7 lettres permettant de reconstituer le prénom JUSTINE.

Le jeu se déroule en deux étapes :
Étape 1 : On prend au hasard une boule de la première urne et on regarde la lettre tirée.

Étape 2 : - Si la lettre tirée est une voyelle, on tire au hasard la deuxième boule dans la première urne, **la première boule tirée n'étant pas remise en jeu**. On regarde la seconde lettre tirée.
- Si la lettre tirée est une consonne, on tire au hasard la deuxième boule dans la deuxième urne. On regarde la seconde lettre tirée.

On considère les deux événements :
- V_1 « la première lettre tirée est une voyelle » ;
- V_2 « la deuxième lettre tirée est une voyelle ».

1. Calculer la probabilité que la première lettre tirée soit une voyelle.
2. Calculer la probabilité que la deuxième lettre tirée soit une voyelle sachant que la première est une consonne.
3. Reproduire et compléter l'arbre suivant :



4. Montrer que la probabilité que la deuxième lettre tirée soit une voyelle est $\dfrac{37}{105}$.
5. On suppose que la deuxième lettre est une voyelle.
   Quelle est la probablilité que la première lettre tirée soit une voyelle ?

Exercice 2 **6 points**

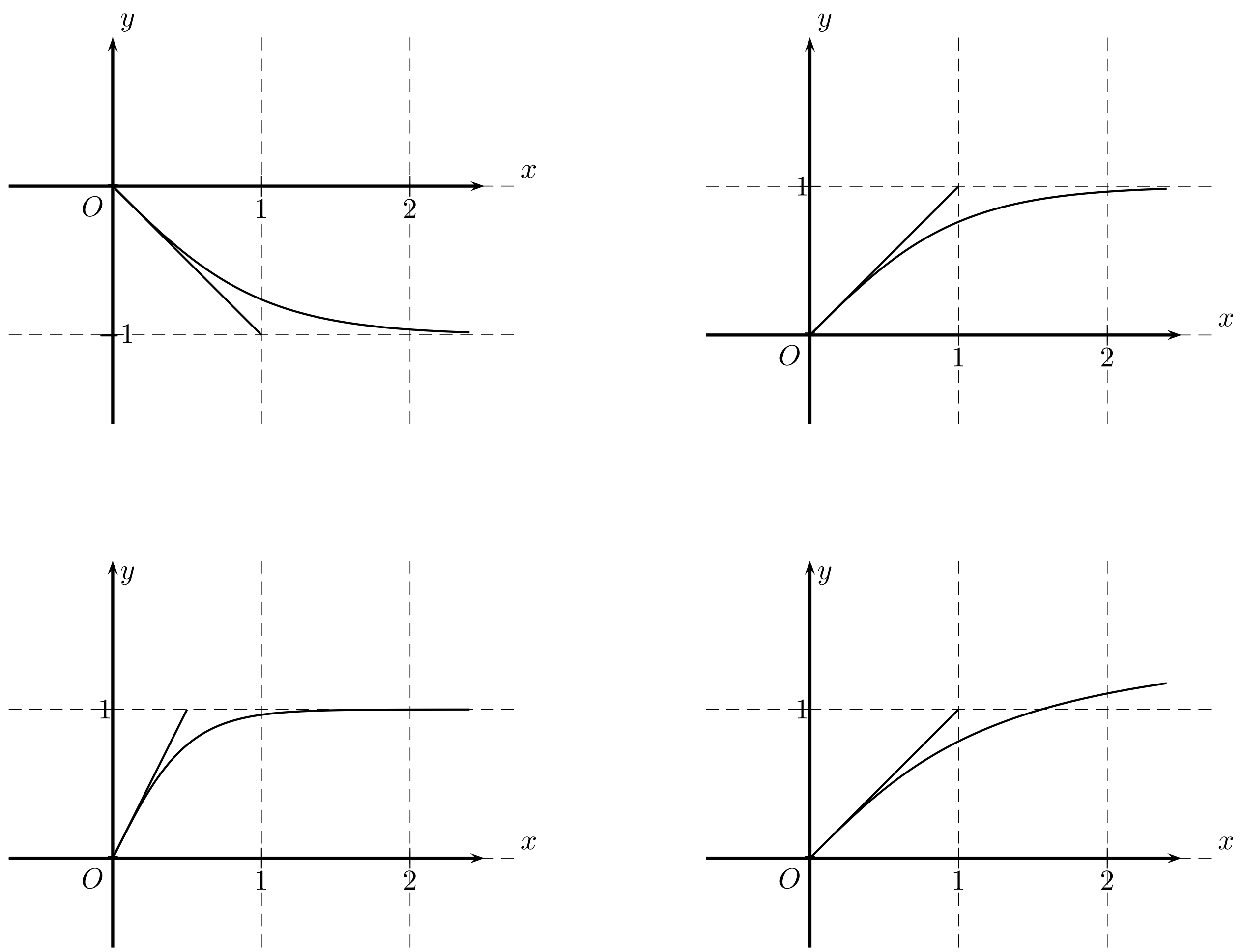
On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$ pour tout nombre réel x de $[0\,;\,+\infty[$.
on note (C) sa courbe représentative dans le repère (Ox, Oy).

1. Calculer $f(0)$ et justifier que $f(\ln 3) = 0,8$.
2. a) On note f' la fonction dérivée de f. Démontrer que pour réel x positif, $f'(x) = \dfrac{4e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2}$.

   b) Déterminer le sens de variation de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$.

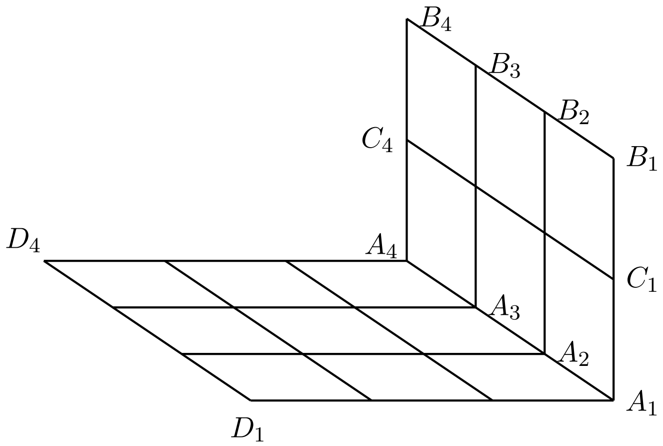
   c) Calculer $f'(0)$, puis donner une équation de la tangente (Δ) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.
3. a) Établir que, pour tout nombre réel x positif, $f(x) - 1 = \dfrac{-2}{e^{2x} + 1}$.

   b) En déduire que, pour tout nombre réel x positif, $f(x) < 1$.
4. Les quatre graphiques ci-dessous ont été obtenus à l'aide d'un logiciel informatique.
   Parmi ces quatre graphiques, un seul peut représenter la courbe (C) et la tangente (Δ).
   Préciser quel est ce graphique et justifier soigneusement l'élimination de chacun des trois autres graphiques.



Exercice 3 **6 points**

La figure ci-dessous représente, en perspective cavalière, le sol $(A_1A_4D_4D_1)$ et le mur de droite $(A_1B_1B_4A_4)$ d'une salle. Le mur et le sol sont pavés avec des carrelages identiques de forme carrée.



Le but de l'exercice est de représenter sur l'annexe ce carrelage en perspective centrale sachant que le sol est horizontal, le mur est vertical et le plan $(D_1A_1B_1)$ est frontal.

Dans cette perspective centrale, on convient de noter avec une lettre minuscule les images des points. Ainsi, a_1 est l'image de A_1, a_2 l'image de A_2, ...

On a représenté sur la feuille annexe la ligne d'horizon, le segment $[a_1b_1]$ et le point a_3.
Aucune justification des constructions n'est attendue, mais on laissera apparents tous les traits de construction.

1. a) Construire le point de fuite de la droite (A_1A_3), noté f, et le point b_3.
   b) Construire le segment $[a_2b_2]$.
   c) Construire le point c_1.
   d) Construire le segment $[a_4b_4]$.
2. a) Préciser, en justifiant la réponse, le réel k tel que $a_1d_1 = ka_1c_1$.
   b) Construire le point d_1.
   c) Terminer la figure.
3. Pour chacune des trois affirmations ci-dessous dire, en justifiant la réponse donnée, si elle est vraie ou fausse. En cas de réponse négative, on pourra fournir un contre-exemple issu de la figure complétée en annexe.
   (1) Le plan $(A_4B_4D_4)$ est frontal.
   (2) En perspective centrale, les milieux sont toujours conservés.
   (3) En perspective centrale, les milieux ne sont jamais conservés.

Exercice 4 **4 points**

Dans cet exercice, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Le but de l'exercice est d'étudier quelques propriétés du nombre entier 3^{2008} dont certaines ne peuvent être obtenues à l'aide d'une calculatrice.

Partie A : Chiffre des unités de 3^{2008}

1. Justifier que $3^8 \equiv 1 \mod 10$. En déduire que $3^{2008} \equiv 1 \mod 10$.
2. Quel est le chiffre des unités de 3^{2008} ?

Partie B : Nombre de chiffres de 3^{2008}

Dans cette partie, $\log$ désigne la fonction logarithme décimal.
On pourra utiliser les propriétés suivantes :
$*$ $\log a^n = n \times \log a$, pour tout nombre réel a strictement positif et tout nombre entier n.
$*$ $\log 10 = 1$
$*$ La fonction $\log$ est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

1. Sachant que $0,4771 < \log 3 < 0,4772$, justifier l'encadrement $958 < \log\left(3^{2008}\right) < 959$.
2. Calculer $\log\left(10^{958}\right)$ et $\log\left(10^{959}\right)$.
3. Déduire des questions précédentes l'encadrement $10^{958} < 3^{2008} < 10^{959}$.
4. Expliquer comment on peut déduire de l'inégalité précédente le nombre de chiffres de l'écriture décimale du nombre entier 3^{2008}.

ANNEXE (à rendre avec la copie)

Exercice 3