

# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

## MATHÉMATIQUES

### Série S

#### Enseignement Obligatoire

**Durée de l'épreuve : 4 heures – Coefficient : 7**

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

***Le candidat doit traiter les quatre exercices. Il est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.***

***La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.***

### Exercice 1 (4 points)

Une urne A contient quatre boules rouges et six boules noires.

Une urne B contient une boule rouge et neuf boules noires.

Les boules sont indiscernables au toucher.

#### Partie A

Un joueur dispose d'un dé à six faces, parfaitement équilibré, numéroté de 1 à 6. Il le lance une fois : s'il obtient 1, il tire au hasard une boule de l'urne A, sinon il tire au hasard une boule de l'urne B.

1. Soit  $R$  l'événement « le joueur obtient une boule rouge ».  
Montrer que  $p(R) = 0,15$ .
2. Si le joueur obtient une boule rouge, la probabilité qu'elle provienne de A est-elle supérieure ou égale à la probabilité qu'elle provienne de B ?

#### Partie B

Le joueur répète deux fois l'épreuve décrite dans la **partie A**, dans des conditions identiques et indépendantes (c'est-à-dire qu'à l'issue de la première épreuve, les urnes retrouvent leur composition initiale).

Soit  $x$  un entier naturel non nul.

Lors de chacune des deux épreuves, le joueur gagne  $x$  euros s'il obtient une boule rouge et perd deux euros s'il obtient une boule noire.

On désigne par  $G$  la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur en euros au terme des deux épreuves. La variable aléatoire  $G$  prend donc les valeurs  $2x$ ,  $x - 2$  et  $-4$ .

1. Déterminer la loi de probabilité de  $G$ .
2. Exprimer l'espérance  $E(G)$  de la variable aléatoire  $G$  en fonction de  $x$ .
3. Pour quelles valeurs de  $x$  a-t-on  $E(G) \geq 0$  ?

## Exercice 2 (5 points)

Pour chacune des six propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

### Partie A

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

1. Soit  $z$  un nombre complexe d'argument  $\frac{\pi}{3}$ .

**Proposition 1** : «  $z^{100}$  est un nombre réel ».

2. Soit  $(E)$  l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  différente de 1 du plan telle que  $\left| \frac{z}{1-z} \right| = 1$ .

**Proposition 2** : « l'ensemble  $(E)$  est une droite parallèle à l'axe des réels ».

3. Soit  $r$  la rotation d'angle  $-\frac{\pi}{2}$  et dont le centre  $K$  a pour affixe  $1+i\sqrt{3}$ .

**Proposition 3** : « l'image du point  $O$  par la rotation  $r$  a pour affixe  $(1-\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3})$  ».

4. On considère l'équation  $(E)$  suivante :  $z^2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)z + 1 = 0$ .

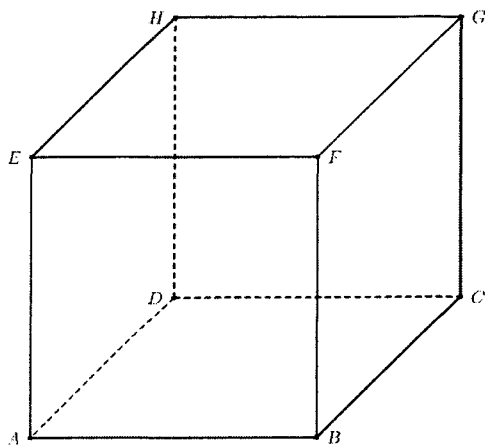
**Proposition 4** : « l'équation  $(E)$  a deux solutions complexes de modules égaux à 1 ».

### Partie B

On considère le cube  $ABCDEFGH$  d'arête 1, représenté ci-dessous.

**Proposition 5** : « le vecteur  $\overrightarrow{AG}$  est normal au plan  $(BDE)$  ».

**Proposition 6** : « les droites  $(EB)$  et  $(ED)$  sont perpendiculaires ».



### Exercice 3 (6 points)

#### Partie A. Démonstration de cours

Prérequis : définition d'une suite tendant vers  $+\infty$ .

« une suite tend vers  $+\infty$  si, pour tout réel  $A$ , tous les termes de la suite sont, à partir d'un certain rang, supérieurs à  $A$  »

Démontrer le théorème suivant : une suite croissante non majorée tend vers  $+\infty$ .

#### Partie B

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = \ln(x+1) + \frac{1}{2}x^2$ .

La courbe (C) représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthogonal est donnée en annexe, page 6. Cette annexe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

1. Étudier le sens de variation de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .
2. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.
3. Tracer la droite (T) sur le graphique de l'annexe, page 6.

Dans la suite de l'exercice, on admet que, sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ , la courbe (C) est située au dessus de la droite (T).

#### Partie C

On considère la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :

$$u_0 = 1 \text{ et, pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Construire sur l'axe des abscisses les cinq premiers termes de la suite  $(u_n)$  en laissant apparents les traits de construction (utiliser le graphique de l'annexe, page 6).
2. À partir de ce graphique, que peut-on conjecturer concernant le sens de variation de la suite  $(u_n)$  et son comportement lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  ?
3. a) Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \geq 1$ .  
b) Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.  
c) Montrer que la suite  $(u_n)$  n'est pas majorée.  
d) En déduire la limite de la suite  $(u_n)$ .

### Exercice 4 (5 points)

On considère une fonction  $f$  dérivable sur l'intervalle  $]-\infty; +\infty[$ .

On donne le tableau de ses variations :

|         |           |     |            |           |     |
|---------|-----------|-----|------------|-----------|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $0$ | $2$        | $+\infty$ |     |
| $f'(x)$ |           | $+$ | $+$        | $0$       | $-$ |
| $f(x)$  |           |     |            |           |     |
|         | $-\infty$ | $0$ | $1+e^{-2}$ |           | $1$ |

Soit  $g$  la fonction définie sur  $]-\infty; +\infty[$  par  $g(x) = \int_0^x f(t) dt$ .

#### Partie A

- En tenant compte de toutes les informations contenues dans le tableau de variation, tracer une courbe (C) susceptible de représenter  $f$  dans le plan muni d'un repère orthogonal (unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses, 2 cm sur l'axe des ordonnées).
- Interpréter graphiquement  $g(2)$ .
  - Montrer que  $0 \leq g(2) \leq 2,5$ .
- Soit  $x$  un réel supérieur à 2.  
Montrer que  $\int_2^x f(t) dt \geq x - 2$ . En déduire que  $g(x) \geq x - 2$ .
  - Déterminer la limite de la fonction  $g$  en  $+\infty$ .
- Étudier le sens de variation de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $]-\infty; +\infty[$ .

#### Partie B

On admet que pour tout réel  $t$ ,  $f(t) = (t-1)e^{-t} + 1$ .

- À l'aide d'une intégration par parties, exprimer en fonction du réel  $x$  l'intégrale  $\int_0^x (t-1)e^{-t} dt$ .
- En déduire que pour tout réel  $x$ ,  $g(x) = x(1 - e^{-x})$ .
- Déterminer la limite de la fonction  $g$  en  $-\infty$ .