BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2008

MATHÉMATIQUES

Série S

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

obligatoire

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

> **Le sujet est composé de 5 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.**
> **Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.**
> **Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.**

Ce sujet nécessite une feuille de papier millimétré

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

<u>EXERCICE N°1</u> (4 points)

Commun à tous les candidats

Dans une kermesse un organisateur de jeux dispose de 2 roues de 20 cases chacune.
La roue A comporte 18 cases noires et 2 cases rouges.
La roue B comporte 16 cases noires et 4 cases rouges.
Lors du lancer d'une roue toutes les cases ont la même probabilité d'être obtenues.
La règle du jeu est la suivante :

- Le joueur mise 1 € et lance la roue A.
- S'il obtient une case rouge, alors il lance la roue B, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.
- S'il obtient une case noire, alors il relance la roue A, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.

1) Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.

2) Soient E et F les événements :
E : « à l'issue de la partie, les 2 cases obtenues sont rouges » ;
F : « à l'issue de la partie, une seule des deux cases est rouge ».
Montrer que $p(\text{E}) = 0{,}02$ et $p(\text{F}) = 0{,}17$.

3) Si les 2 cases obtenues sont rouges le joueur reçoit 10 € ; si une seule des cases est rouge le joueur reçoit 2 € ; sinon il ne reçoit rien.
X désigne la variable aléatoire égale au gain algébrique en euros du joueur (rappel : le joueur mise 1 €).

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance mathématique de X et en donner une interprétation.

4) Le joueur décide de jouer n parties consécutives et indépendantes (n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2).

a) Démontrer que la probabilité p_n qu'il lance au moins une fois la roue B est telle que : $p_n = 1 - (0{,}9)^n$.

b) Justifier que la suite de terme général p_n est convergente et préciser sa limite.

c) Quelle est la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $p_n > 0{,}9$?

EXERCICE N°2 (3 points)

Commun à tous les candidats

On se propose de déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ vérifiant l'équation différentielle (*E*) : $x\,f'(x)-(2x+1)f(x)=8x^2$.

1) a) Démontrer que si f est solution de (*E*) alors la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ est solution de l'équation différentielle $(E'): y'=2y+8$.

b) Démontrer que si h est solution de (E') alors la fonction f définie par $f(x)=x\,h(x)$ est solution de (*E*).

2) Résoudre (E') et en déduire toutes les solutions de (*E*).

3) Existe-t-il une fonction f solution de l'équation différentielle (*E*) dont la représentation graphique dans un repère donné passe par le point A (ln 2, 0) ? Si oui la préciser.

EXERCICE N°3 (4 points)

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).

Pour chaque question, une seule des propositions est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, la lettre correspondant à la réponse choisie. Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon.

Dans le plan orienté, $ABCD$ est un carré direct $\left(\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)=\frac{\pi}{2}\right)$. On note I son centre et J le milieu de $[AI]$.

1) C est le barycentre des points pondérés (A, m), $(B, 1)$ et $(D, 1)$ lorsque :
   a) $m=-2$ **b)** $m=2$ **c)** $m=-1$ **d)** $m=3$

2) a) B est l'image de C par la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

   b) Le rapport de l'homothétie de centre C qui transforme I en J est $\frac{2}{3}$.

   c) Le triangle DAB est invariant par la symétrie de centre I.

   d) J est l'image de I par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{DB}$.

3) L'ensemble des points M du plan tels que $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right\|=AB$ est :
   a) la médiatrice de $[AC]$.
   b) le cercle circonscrit au carré $ABCD$.
   c) la médiatrice de $[AI]$.
   d) le cercle inscrit dans le carré $ABCD$.

4) L'ensemble des points M du plan tels que $\left(2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}\right).\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\right)=0$ est :
   a) la médiatrice de $[AC]$.
   b) le cercle circonscrit au carré $ABCD$.
   c) la médiatrice de $[AI]$.
   d) le cercle inscrit dans le carré $ABCD$.

EXERCICE N°4 **(4 points)**

Commun à tous les candidats

On considère la suite numérique (J_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par $J_n = \int_1^n e^{-t}\sqrt{t+1}\,dt$.

1) Démontrer que la suite (J_n) est croissante.

2) *Dans cette question, le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n'aboutit pas.*

On définit la suite (I_n), pour tout entier naturel n non nul, par $I_n = \int_1^n (t+1)e^{-t}\,dt$.

a) Justifier que, pour tout $t \geqslant 1$, on a $\sqrt{t+1} \leqslant t+1$.

b) En déduire que $J_n \leqslant I_n$.

c) Calculer I_n en fonction de n. En déduire que la suite (J_n) est majorée par un nombre réel (indépendant de n).

d) Que peut-on en conclure pour la suite (J_n) ?

EXERCICE N°5 **(5 points)**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.
On réalisera une figure en prenant 2 cm comme unité graphique sur chaque axe.
On considère les points A, B et I d'affixes respectives $z_A = 1$, $z_B = 5$ et $z_I = 3 + \mathrm{i}$.
On note $(\mathscr{C})$ le cercle de centre O et de rayon 1, (Δ) la médiatrice de $[AB]$ et (T) la tangente au cercle $(\mathscr{C})$ en A.
À tout point M d'affixe z, différent de A, on associe le point M' d'affixe z' telle que :

$z' = \dfrac{z-5}{z-1}$. Le point M' est appelé l'image de M.

Partie A :

1) Déterminer sous forme algébrique l'affixe du point I' image de I.
Vérifier que I' appartient à $(\mathscr{C})$.

2) a) Justifier que pour tout point M distinct de A et B, on a : $OM' = \dfrac{MB}{MA}$.

b) Justifier que pour tout point M distinct de A et B, on a : $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM'}\right) = \left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)$.

Partie B :

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

Dans la suite de l'exercice, M désigne un point quelconque de (Δ). On cherche à construire géométriquement son image M'.

1) Démontrer que M' appartient à $(\mathscr{C})$.

2) On note (d) la droite symétrique de la droite (AM) par rapport à la tangente (T).
(d) recoupe $(\mathscr{C})$ en N.

a) Justifier que les triangles AMB et AON sont isocèles.
Après avoir justifié que $\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AN}\right) = \left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right)$, démontrer que $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{ON}\right) = \left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)$.

b) En déduire une construction de M'.