Correction du baccalauréat S Asie 18 juin 2008

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

A -Vrai ou faux?

1. Faux : contre-exemple : il suffit de prendre $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_3$ perpendiculaires à $\mathscr{P}_2$.
2. Faux : contre-exemple : on reprend l'exemple précédent.
3. Vrai : si deux plans sont parallèles, tout plan sécant à l'un est sécant à l'autre.
4. Faux : $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont parallèles : si la droite $\mathscr{D}$ est incluse dans $\mathscr{P}_1$ elle n'est pas sécante avec $\mathscr{P}_2$.

B - Intersection de trois plans donnés

1. Le vecteur $\overrightarrow{n}_1(1\ ;\ 1\ ;\ -1)$ est normal à $\mathscr{P}_1$, $\overrightarrow{n}_2(2\ ;\ 1\ ;\ 1)$ est normal à $\mathscr{P}_2$ et ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires : les deux plans sont donc sécants.
Il faut résoudre :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y-z &=& 0\\ 2x+y+z-3 &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x+y-z &=& 0\\ -y+3z-3 &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -3z+3+z\\ y &=& 3z-3\\ z &=& z\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -2t+3\\ y &=& 3t-3\\ z &=& t\end{array}\right.$$

qui est une représentation paramétrique de la droite Δ commune aux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$

2. Un point de Δ appartient à $\mathscr{P}_3$ si et seulement si :

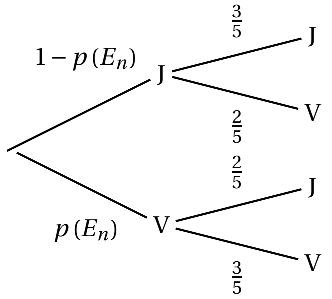
$$-2t+3+2(3t-3)-4(t)+3=0 \iff -2t+6t-4t+3-6+3=0$$

qui est vrai quel que soit $t \in \mathbb{R}$.
Ceci signifie que tout point de Δ appartient à $\mathscr{P}_3$.
Conclusion : $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3 = \Delta$

EXERCICE 2 **5 points**

Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Mise en évidence d'une relation de récurrence
   a. On a $p\left(E_1\right)=\dfrac{2}{5}$, $p_{E_1}\left(E_2\right)=\dfrac{3}{5}$ et $p_{\overline{E_1}}\left(E_2\right)=\dfrac{2}{5}$.
   D'après la formule des probabilités totales appliquée à E_1 et à $\overline{E_1}$:
   $p\left(E_2\right)=p\left(E_1\cap E_2\right)+p\left(E_1\cap\overline{E_2}\right)=p\left(E_1\right)\times p_{E_1}\left(E_2\right)+p\left(\overline{E_1}\right)\times p_{\overline{E_1}}\left(E_2\right)=$
   $\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{5}+\left(1-\dfrac{2}{5}\right)\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{6}{25}+\dfrac{6}{25}=\dfrac{12}{25}=0,48.$
   b. Arbre pondéré :



D'après la loi des probabilités totales on a $p\left(E_{n+1}\right) = \dfrac{2}{5}\left(1 - p\left(E_n\right)\right) + \dfrac{3}{5}p\left(E_n\right) = \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{5}p\left(E_n\right)$.

2. Étude d'une suite

a. Démonstration par récurrence :

— *Initialisation* : $u_1 = \dfrac{2}{5} < \dfrac{1}{2}$: vrai ; la relation est vraie au rang 1.

— *Hérédité* : soit un naturel $n \geqslant 1$ et supposons que $u_n < \dfrac{1}{2}$; alors $\dfrac{1}{5}u_n < \dfrac{1}{10} \iff \dfrac{1}{5}u_n + \dfrac{2}{5} < \dfrac{1}{10} + \dfrac{2}{5} \iff u_{n+1} < \dfrac{5}{10}$. Soit finalement $u_{n+1} < \dfrac{1}{2}$. La relation est vraie au rang $n+1$.

La relation est vraie au rang et si elle est vraie au rang $n \geqslant 1$, elle est vraie au rang $n+1$. On a démontré par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \leqslant \dfrac{1}{2}$.

b. Pour tout naturel $n > 0$,
$u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{5}u_n + \dfrac{2}{5} - u_n = \dfrac{2}{5} - \dfrac{4}{5}u_n = \dfrac{4}{5}\left(\dfrac{1}{2} - u_n\right)$.
D'après la question précédente $u_n \leqslant \dfrac{1}{2}$, donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.
La suite (u_n) est croissante

c. La suite est croissante et majorée par 1 : elle converge vers une limite ℓ telle que $\ell \leqslant 1$.
ℓ vérifie la relation de récurrence : $\ell = \dfrac{1}{5}\ell + \dfrac{2}{5} \iff 5\ell = \ell + 2 \iff 4\ell = 2 \iff \ell = \dfrac{1}{2}$.

3. **a.** On a de façon évidente $u_n = p\left(E_n\right)$ et par conséquent $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} p\left(E_n\right) = \dfrac{1}{2}$.

b. Considérons la suite des différences de $p\left(E_n\right)$ avec sa limite 0,5, soit $v_n = p\left(E_n\right) - 0,5$.
On a $v_{n+1} = p\left(E_{n+1}\right) - 0,5$.
La relation de récurrence devient : $v_{n+1} + 0,5 = \dfrac{1}{5}\left(v_n + 0,5\right) + \dfrac{2}{5} \iff v_{n+1} = \dfrac{1}{5}v_n$.

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$ et $v_n = \left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1} \times v_1$ soit $p\left(E_n\right) - 0,5 = \dfrac{1}{5^{n-1}}\left(\dfrac{2}{5} - 0,5\right) \iff p\left(E_n\right) = 0,5 - \dfrac{1}{5^{n-1}}\dfrac{1}{10}$.

On a donc $0,49999 \leqslant p\left(E_n\right) \iff \dfrac{1}{2 \times 5^n} < 10^{-5} \iff 5^n > 50000 \iff 5^{n-1} > 10^4 \iff (n-1)\ln 5 > 4\ln 10 \iff n - 1 > \dfrac{4\ln 10}{\ln 5} \iff n > 1 + \dfrac{4\ln 10}{\ln 5} \approx 6,7$.
Il faut donc prendre $n = 7$.

EXERCICE 2 **5 points**

Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

A - Représentation graphique de quelques ensembles

1. $x \equiv 2 \quad$ (modulo 3) et $y \equiv 1 \quad$ (modulo 3), sur le graphique 1 de la feuille annexe
2. $x + y \equiv 1 \quad$ (modulo 3), sur le graphique 2 de la feuille annexe ;
3. $x \equiv y \quad$ (modulo 3), sur le graphique 3 de la feuille annexe.

B - Résolution d'une équation

On considère l'équation (E) : $7x - 4y = 1$, où les inconnues x et y sont des entiers relatifs.

1. Le couple $(-1\ ;\ -2)$ est un couple solution.
2. On a donc :
$\left\{\begin{array}{lcl} 7\times(-1)-4\times(-2) & = & 1 \\ 7x-4y & = & 1 \end{array}\right. \Rightarrow$ (par différence) $7(x+1)-4(y+2)=0 \iff$
$7(x+1)=4(y+2) \quad (1)$.
D'après le théorème de Gauss, 7 divise $4(y+2)$ mais est premier avec 4 : il divise donc $y+2$; il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y+2=7k \iff y=7k-2$.
En reportant dans (1), $7(x+1)=4\times 7k \iff x+1=4k \iff x=4k-1$.
Les couples solutions sont de la forme $(4k-1\ ;\ 7k-2)$, $k\in\mathbb{Z}$.
Inversement on vérifie qu'un couple $(4k-1\ ;\ 7k-2)$ vérifie l'équation proposée car $7(4k-1)-4(7k-2)=28k-7-28k+8=1$.
3. $(x\ ;\ y)$ appartient à $R_{4,7} \iff \left\{\begin{array}{lcl} 0\leqslant & 4k-1\leqslant & 4 \\ 0\leqslant & 7k-2\leqslant & 7 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 1\leqslant & 4k\leqslant & 5 \\ 2\leqslant & 7k\leqslant & 9 \end{array}\right. \iff$
$k=1$
Il y a donc une seule solution : le couple $(3\,;\,5)$.

C - Une propriété des points situés sur la diagonale du réseau.

1. $M(x\ ;\ y)\in[\text{O}A] \iff$ il existe $k\in\mathbb{R}$, $\overrightarrow{\text{O}M}=k\overrightarrow{\text{O}A}$,
$k\in[0\ ;\ 1] \iff x=ka,\ y=kb,\ k\in[0\ ;\ 1] \iff 0\leqslant x\leqslant a\ ;\ 0\leqslant y\leqslant b,\ x=ka,$
$y=kb \iff 0\leqslant x\leqslant a\ ;\ 0\leqslant y\leqslant b,\ k=\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b} \iff 0\leqslant x\leqslant a\ ;\ 0\leqslant y\leqslant b\ ;\ ay=bx.$
2. D'après la question précédente a divise bx mais est premier avec b : il divise donc x et de même b divise y. Or on a vu que :
$0\leqslant x\leqslant a$ ce qui implique que $x=0$ ou $x=a$ et de même $y=0$ ou $y=b$. Les points solutions sont donc $\text{O}(0\,;\,0)$ et $A(a\ ;\ b)$.
3. Considérons le pgcd d des nombres a et b. On a $a=da'$ et $b=db'$ avec $0<a'<a$ et $0<b'<b$.
L'égalité $d=\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}$ entraîne $a'b=ab'$. Donc le point de coordonnées $(a'\ ;\ b')$ appartient au segment $[\text{O}A]$.
Il existe donc au moins un autre point du réseau sur le segment $[\text{O}A]$.

EXERCICE 3 — 4 points

Commun à tous les candidats

A - Quelques propriétés

1. $z\neq 0$ et $z'=-\dfrac{1}{z}\Rightarrow |z'|=\left|-\dfrac{1}{z}\right| \iff |z'|=\left|\dfrac{1}{z}\right|=\dfrac{1}{|\overline{z}|} \iff |z'|\times|\overline{z}|=1.$
Pour les arguments : $z'=-\dfrac{1}{\overline{z}}\Rightarrow \arg\left(z'\right)=\arg\left(-\dfrac{1}{\overline{z}}\right)=\arg(-1)-\arg\left(\overline{z}\right)=\pi-(-\arg z)=$
$\pi+\arg z=\arg(z)+\pi$.
2. Ceci résulte de la question précédente ; de plus les points sont dans l'ordre M, O et M'.
3. Pour $z\neq 0$, on a $\dfrac{1}{z}(z-1)=1-\dfrac{1}{z}=1-\overline{\dfrac{1}{\overline{z}}}=1+\overline{z'}=\overline{1}+\overline{z'}=\overline{z'+1}.$

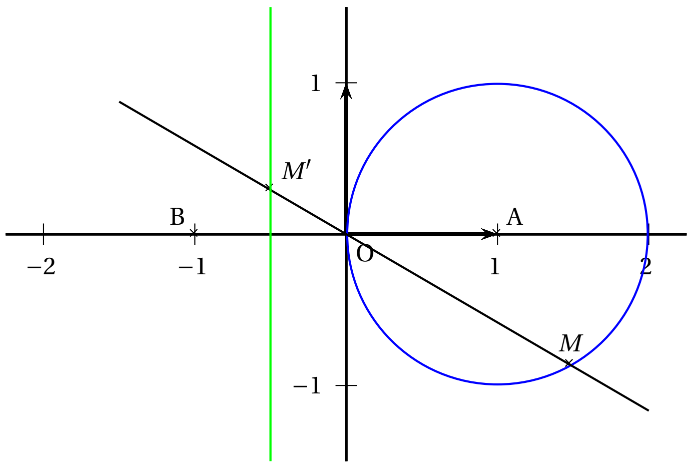
B - Construction de l'image d'un point

1. $|z-1| = 1 \iff AM = 1 \iff M$ appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon 1.
2. **a.** $\overline{z'+1} = \dfrac{1}{z}(z-1) \Rightarrow \left|\overline{z'+1}\right| = \left|\dfrac{1}{z}(z-1)\right| \iff \left|z'+1\right| = \left|\dfrac{1}{z}\right| \times |z-1| \iff \left|z'+1\right| = \left|\dfrac{1}{z}\right|$ (car $M \in \mathscr{C} \iff |z-1| = 1$) $\iff \left|z'+1\right| = \left|-\dfrac{1}{\overline{z}}\right| \iff \left|z'+1\right| = \left|z'\right|$.

   Cette dernière égalité s'interprète géométriquement par : $BM' = OM'$ qui signifie que M' est équidistant de B et de O, autrement dit M' appartient à la médiatrice de [OB].

   b. $\left|z'+1\right| = \left|z'\right| \iff \left|-\dfrac{1}{\overline{z}}+1\right| = \left|-\dfrac{1}{\overline{z}}\right| \iff \left|\dfrac{\overline{z}-1}{\overline{z}}\right| = \dfrac{1}{|\overline{z}|} \iff \left|\overline{z}-1\right| = 1 \iff$ $|z-1| = 1$.

   La réciproque est donc vraie : on a bien $OM = 1$.
3. Figure



Construction de l'image d'un point de $\mathscr{C}$:
— M' est aligné avec O et M : il appartient à la droite (OM) ;
— $M'B = M'O$, donc M' appartient à la médiatrice de [OB] ;
— M' est donc le point commun à la droite (OM) et à la médiatrice de [OB].

EXERCICE 4 **7 points**
Commun à tous les candidats

A - Restitution organisée de connaissances

B - Étude d'une fonction

1. La fonction f est le produit de deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$: elle est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \mathrm{e}^{-x} - (x+1)\mathrm{e}^{-x} = -x\mathrm{e}^{-x}$ qui est du signe de $-x$, puisque $\mathrm{e}^{-x} > 0$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$.

   La fonction est donc croissante sur $\mathbb{R}^-$ et décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

   Le maximum est obtenu pour $x = 0$, $f(0) = 1 \times \mathrm{e}^{-0} = 1$.

   Limites :

   — $f(x) = x\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x}$.
   D'après la R. O. C. par produit et somme de limites : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

   — $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} (x+1) = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$, donc par produit de limites : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

   On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$+$		$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

2. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$. On fera apparaître les résultats obtenus précédemment. Voir ci-dessous

C - Étude d'une famille de fonctions

1. **a.** On a $f_0(x) = x+1$: c'est une fonction affine

   b. Les points communs à $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$ ont des coordonnées qui vérifient :

$$\left\{\begin{array}{lcl} y &=& x+1 \\ y &=& (x+1)\mathrm{e}^x \end{array}\right. \Rightarrow x+1 = (x+1)\mathrm{e}^x \iff (x+1)\left(\mathrm{e}^x - 1\right) = 0 \iff$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} x+1 &=& 0 \\ \mathrm{e}^x - 1 &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x &=& -1 \\ \mathrm{e}^x &=& 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x &=& -1 \\ x &=& 0 \end{array}\right.$$

   On a donc deux points commune : le point $(0;1)$ et le point $(-1;0)$.

   On remarque que quel que soit k, $f_k(-1) = 0$, donc le point $(-1;0)$ appartient à toutes les courbes $\mathscr{C}_k$.

   De même, quel que soit k, $f_k(0) = 1$, donc le point $(0;1)$ appartient à toutes les courbes $\mathscr{C}_k$.

2. Tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
Signe de $x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
Signe de $\mathrm{e}^x - 1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
Signe de $(x+1)\left(\mathrm{e}^x - 1\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a donc :

$f_{k+1}(x) - f_k(x) = (x+1)\mathrm{e}^{(k+1)x} - (x+1)\mathrm{e}^{kx} = (x+1)\mathrm{e}^{kx}\left(\mathrm{e}^x - 1\right)$ qui est du signe du produit ci-dessus car $\mathrm{e}^{kx} > 0$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$. On en déduit que :

— pour $x < -1$ et pour $x > 0$, $\mathscr{C}_{k+1}$ est au dessus de $\mathscr{C}_k$

— pour $-1 < x < 0$, $\mathscr{C}_{k+1}$ est au dessous de $\mathscr{C}_k$

— les deux courbes se coupent en $x = -1$ et en $x = 0$.

f_k produit de fonction dérivable est dérivable et $f_k'(x) = \mathrm{e}^{kx} + k(x+1)\mathrm{e}^{kx} = \mathrm{e}^{kx}(kx + k+1)$.

Comme $\mathrm{e}^{kx} > 0$ quel que soit x et quel que soit k, le signe de $f_k'(x)$ est celui de $kx + k + 1$.

— Si $k > 0$, alors $kx + k + 1 = 0 \iff x = -\dfrac{k+1}{k}$, donc $f_k'(x) > 0$ si $x > -\dfrac{k+1}{k}$, donc la fonction est croissante sur cet intervalle et $f_k'(x) < 0$ si $x < -\dfrac{k+1}{k}$, donc la fonction est décroissante sur cet intervalle.

— Si $k < 0$, alors $kx + k + 1 = 0 \iff x = -\dfrac{k+1}{k}$.

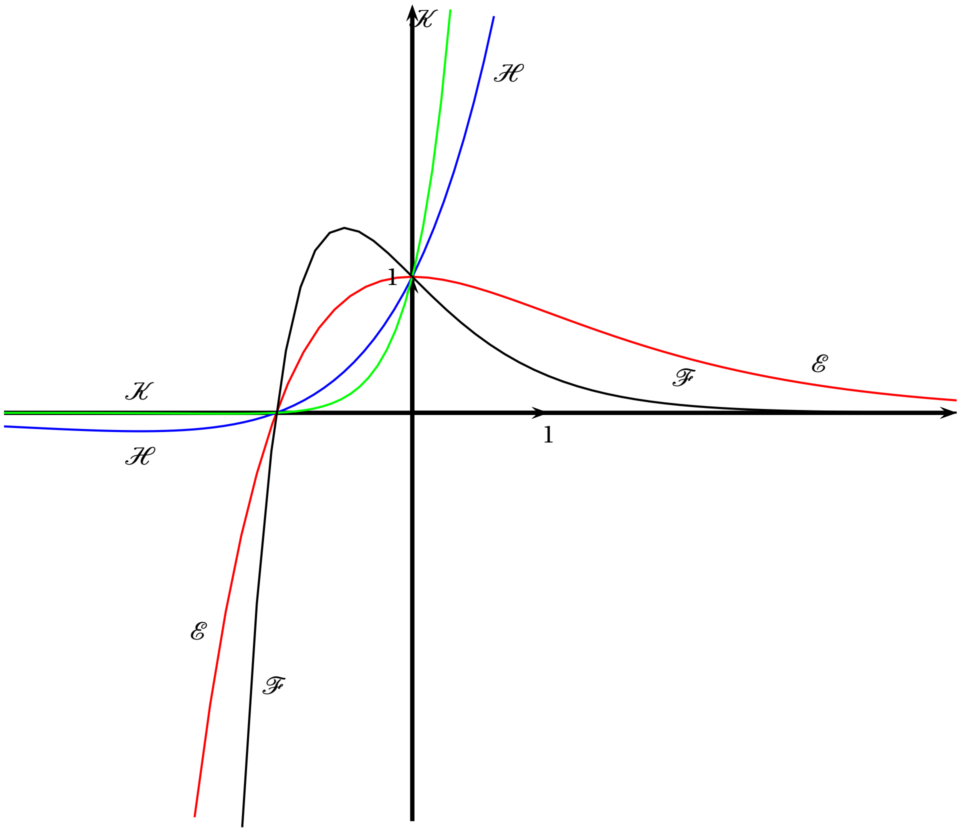
$f_k'(x) > 0 \iff kx + k + 1 > 0 \iff k+1 > -kx \iff x < -\dfrac{k+1}{k}$. La fonction f_k est donc croissante sur $\left]-\infty\,;\, -\dfrac{k+1}{k}\right[$ et décroissante sur $\left]-\dfrac{k+1}{k}\,;\, +\infty\right[$.

3. En utilisant la question précédente, on peut dire que $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ correspondent à des valeurs de k négatives.

Plus précisément la courbe $\mathscr{E}$ croît sur $]-\infty~;~0[$ ce qui correspond à la valeur $k = -1$.

Donc $\mathscr{E}$ représente la fonction f_{-1} et par conséquent $\mathscr{F}$ représente la fonction f_{-3}.

Pour les valeurs de k positives on utilise les résultats de la question **2.** : pour $x > 0$, on constate que que $\mathscr{K}$ est au dessus de $\mathscr{H}$; donc $\mathscr{H}$ représente f_1 et $\mathscr{K}$ représente f_2.



D - Calcul d'une aire plane

1. $\mathscr{A}(\lambda) = \displaystyle\int_0^{\lambda} (t+1)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$. Soit

   $\left\{\begin{array}{lll} u(t) & = & t+1 \\ v'(t) & = & \mathrm{e}^{-t}\end{array}\right.$ d'où $\left\{\begin{array}{lll} u'(t) & = & 1 \\ v(t) & = & -\mathrm{e}^{-t}\end{array}\right.$

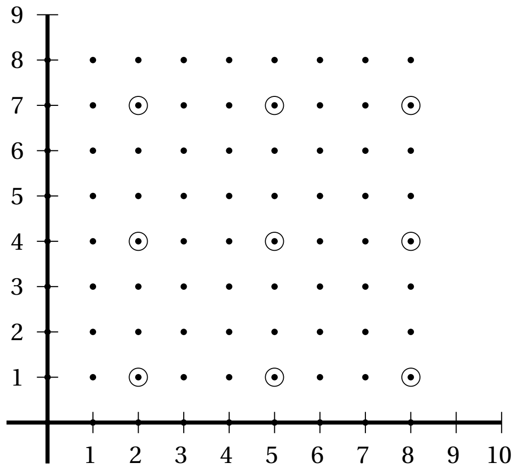
   Toutes ces fonctions sont dérivables donc continues sur $[0~;~\lambda]$, on peut donc intégrer par parties :

   $\mathscr{A}(\lambda) = \left[-(t+1)\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{\lambda} + \displaystyle\int_0^{\lambda} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-(t+1)\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-t}\right]_0^{\lambda} = \left[-(t+2)\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{\lambda} =$

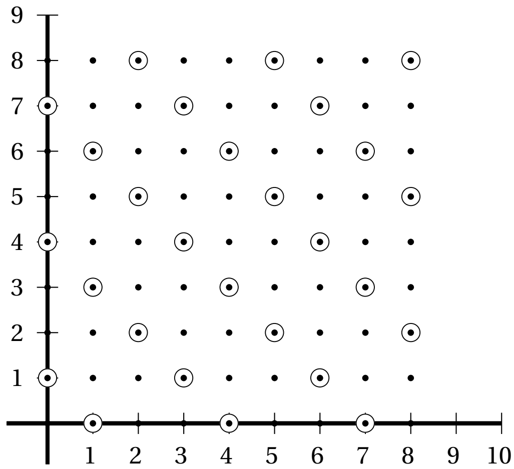
   $-(\lambda+2)\mathrm{e}^{-\lambda} + 2 = 2 - (\lambda+2)\mathrm{e}^{-\lambda}$.

2. Comme $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda} = 0$, $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda\mathrm{e}^{-\lambda} = 0$, $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty} \mathscr{A}(\lambda) = 2$.

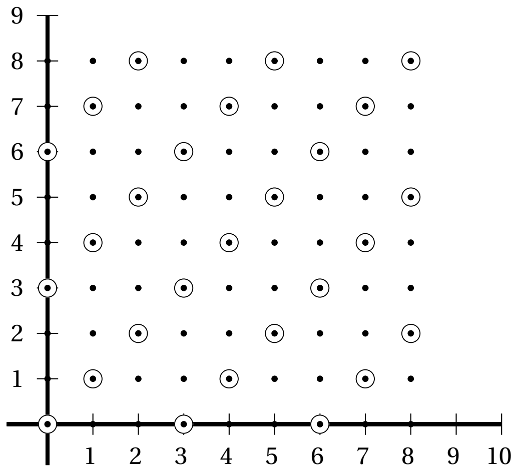
Annexe 1 - exercice 3 (spécialité mathématique) - À rendre avec la copie



Graphique 1



Graphique 2



Graphique 3