BACCALAURÉAT GENERAL

SESSION 2008

MATHÉMATIQUES

SERIE S

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures - Coefficient : 9

Ce sujet comporte 7 pages

L'usage des calculatrices est autorisé selon les termes de la circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999.

2 feuilles de papier millimétré seront mises à la disposition des candidats.

--*-*

Le candidat doit traiter les quatre exercices

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (*4 points*)
Commun à tous les candidats

A – Vrai ou faux ?

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à proposer un contre-exemple ; une figure pourra constituer ce contre-exemple.

Rappel des notations :

- $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ *désigne l'ensemble des points communs aux plans* $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.
- *L'écriture* $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \varnothing$ *signifie que les plans* $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ *n'ont aucun point commun.*

1. Si $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont trois plans distincts de l'espace vérifiant :
$$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \neq \varnothing \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 \neq \varnothing,$$
alors on peut conclure que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_3$ vérifient : $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_3 \neq \varnothing$.

2. Si $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont trois plans distincts de l'espace vérifiant :
$$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = \varnothing,$$
alors on peut conclure que $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont tels que : $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \varnothing$ et $\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = \varnothing$.

3. Si $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont trois plans distincts de l'espace vérifiant :
$$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \neq \varnothing \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_3 = \varnothing,$$
alors on peut conclure que $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ vérifient : $\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 \neq \varnothing$.

4. Si $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont deux plans distincts et $\mathcal{D}$ une droite de l'espace vérifiant :
$$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{D} \neq \varnothing \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \varnothing,$$
alors on peut conclure que $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{D}$ vérifient : $\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{D} \neq \varnothing$.

B – Intersection de trois plans donnés

Dans un repère orthonormal de l'espace on considère les trois plans suivants :

- $\mathcal{P}_1$ d'équation $x + y - z = 0$,
- $\mathcal{P}_2$ d'équation $2x + y + z - 3 = 0$,
- $\mathcal{P}_3$ d'équation $x + 2y - 4z + 3 = 0$.

1. Justifier que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants puis déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection, notée Δ.

2. En déduire la nature de l'intersection $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$.

Exercice 2 (*5 points*)

Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

Soit a et b deux entiers naturels non nuls ; on appelle « réseau » associé aux entiers a et b l'ensemble des points du plan, muni d'un repère orthonormal, dont les coordonnées (x, y) sont des entiers vérifiant les conditions : $0 \leq x \leq a$ et $0 \leq y \leq b$. On note $R_{a,b}$ ce réseau.

Le but de l'exercice est de relier certaines propriétés arithmétiques des entiers x et y à des propriétés géométriques des points correspondants du réseau.

A – Représentation graphique de quelques ensembles.

Dans cette question, les réponses sont attendues sans explication, sous la forme d'un graphique qui sera dûment complété sur la feuille annexe n°1 à rendre avec la copie.

Représenter graphiquement les points $M(x;y)$ du réseau $R_{8,8}$ vérifiant :

a) $x \equiv 2 \pmod 3$ et $y \equiv 1 \pmod 3$, sur le graphique 1 de la feuille annexe ;

b) $x + y \equiv 1 \pmod 3$, sur le graphique 2 de la feuille annexe ;

c) $x \equiv y \pmod 3$, sur le graphique 3 de la feuille annexe.

B – Résolution d'une équation

On considère l'équation (E) : $7x - 4y = 1$, où les inconnues x et y sont des entiers relatifs.

1. Déterminer un couple d'entiers relatifs $(x_0; y_0)$ solution de l'équation (E).
2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).
3. Démontrer que l'équation (E) admet une unique solution $(x\,; y)$ pour laquelle le point $M(x\,; y)$ correspondant appartient au réseau $R_{4,7}$.

C – Une propriété des points situés sur la diagonale du réseau

Si a et b deux entiers naturels non nuls, on considère la diagonale $[OA]$ du réseau $R_{a,b}$, avec $O(0;0)$ et $A(a;b)$.

1. Démontrer que les points du segment $[OA]$ sont caractérisés par les conditions :

$$0 \leq x \leq a \;;\; 0 \leq y \leq b \;;\; ay = bx.$$

2. Démontrer que si a et b sont premiers entre eux, alors les points O et A sont les seuls points du segment $[OA]$ appartenant au réseau $R_{a,b}$.

3. Démontrer que si a et b ne sont pas premiers entre eux, alors le segment $[OA]$ contient au moins un autre point du réseau.
(On pourra considérer le pgcd d des nombres a et b et poser $a = da'$ et $b = db'$.)

Exercice 3 (*4 points*)

Commun à tous les candidats

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. On prendra pour le dessin : $\|\vec{u}\| = 4$ cm.

M est un point d'affixe z non nul. On désigne par M' le point d'affixe z' telle que $z' = -\dfrac{1}{\overline{z}}$, où $\overline{z}$ désigne le conjugué du nombre complexe z.

A – Quelques propriétés

1. Soit z un nombre complexe non nul. Déterminer une relation entre les modules de z et z', puis une relation entre les arguments de z et z'.

2. Démontrer que les points O, M et M' sont alignés.

3. Démontrer que pour tout nombre complexe z non nul on a l'égalité : $\overline{z'+1} = \dfrac{1}{z}(z-1)$.

B – Construction de l'image d'un point

On désigne par A et B les deux points d'affixes respectives 1 et -1.
On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie : $|z-1| = 1$.

1. Quelle est la nature de l'ensemble $\mathscr{C}$?

2. Soit M un point de $\mathscr{C}$ d'affixe z, distinct du point O.
   a) Démontrer que $|z'+1| = |z'|$. Interpréter géométriquement cette égalité.
   b) Est-il vrai que si z' vérifie l'égalité : $|z'+1| = |z'|$, alors z vérifie l'égalité : $|z-1| = 1$?

3. Tracer l'ensemble $\mathscr{C}$ sur une figure. Si M est un point de $\mathscr{C}$, décrire et réaliser la construction du point M'.

Exercice 4 (*7 points*)

Commun à tous les candidats

A – Restitution organisée de connaissances

On suppose connu le résultat suivant : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

Démontrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} x e^{-x} = 0$.

B – Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par : $f(x) = (x+1)e^{-x}$.

On note $\mathscr{C}$ est sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan. On prendra 4 cm pour unité graphique.

1. *Cette question demande le développement d'une certaine démarche comportant plusieurs étapes. La clarté du plan d'étude, la rigueur des raisonnements ainsi que la qualité de la rédaction seront prises en compte dans la notation.*

   Étudier les variations de la fonction f et les limites aux bornes de son ensemble de définition. Résumer ces éléments dans un tableau de variation le plus complet possible.

2. Tracer la courbe $\mathscr{C}$. On fera apparaître les résultats obtenus précédemment.

C – Étude d'une famille de fonctions.

Pour tout entier relatif k, on note f_k la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : $f_k(x) = (x+1)e^{kx}$.

On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormal du plan.

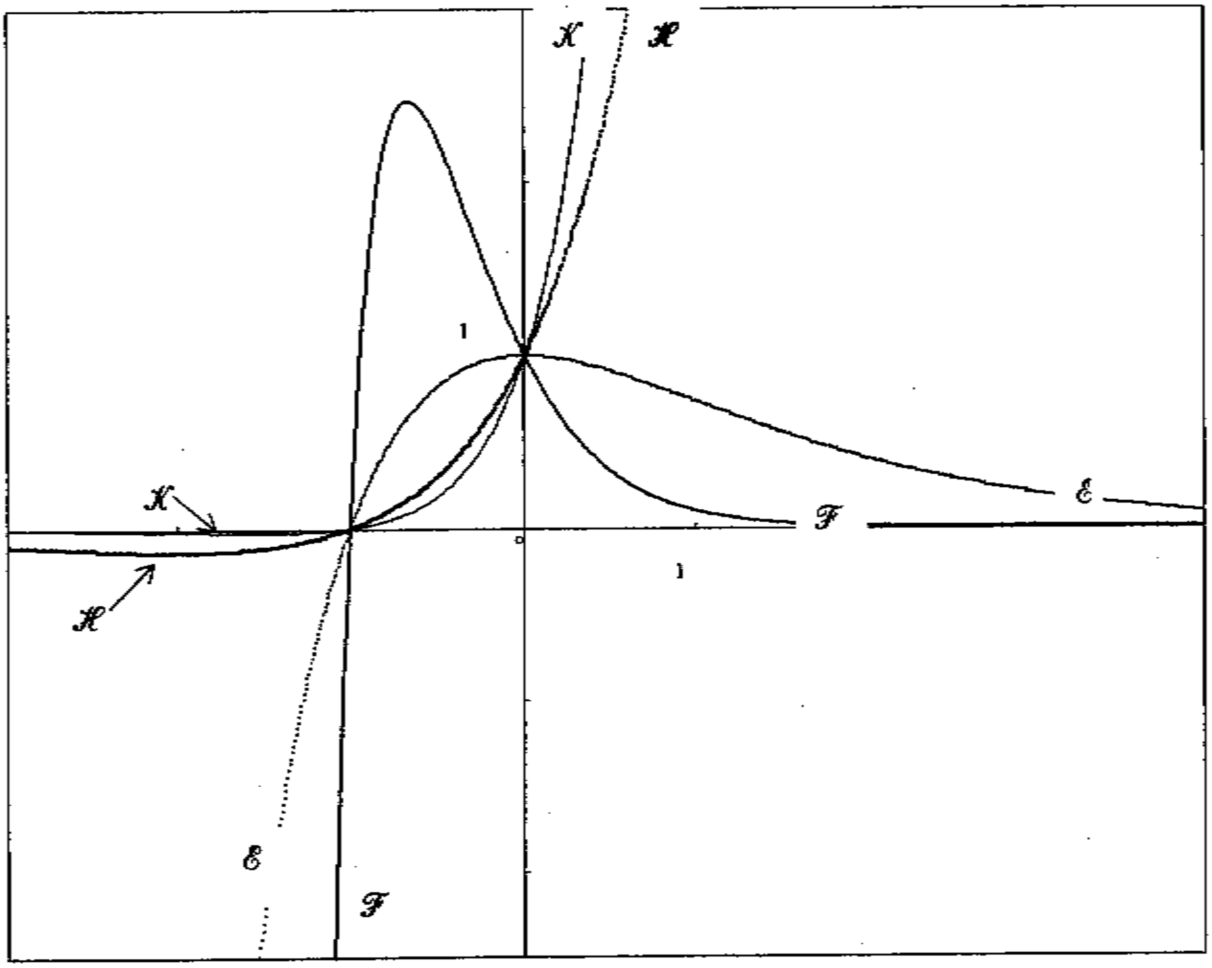
On remarque que le cas $k = -1$ a été traité dans la partie B, car on a $f_{-1} = f$ et $\mathscr{C}_{-1} = \mathscr{C}$.

1. a) Quelle est la nature de la fonction f_0 ?
   b) Déterminer les points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$.
   Vérifier que, pour tout entier k, ces points appartiennent à la courbe $\mathscr{C}_k$.

2. Étudier, suivant les valeurs du réel x, le signe de l'expression : $(x+1)(e^x - 1)$.
   En déduire, pour k entier relatif donné, les positions relatives des courbes $\mathscr{C}_k$ et $\mathscr{C}_{k+1}$.

3. Calculer $f_k'(x)$ pour tout réel x et pour tout entier k non nul.
   En déduire le sens de variation de la fonction f_k suivant les valeurs de k. (On distinguera les cas : $k > 0$ et $k < 0$.)

4. Le graphique suivant représente quatre courbes $\mathscr{E}$, $\mathscr{F}$, $\mathscr{H}$ et $\mathscr{K}$ correspondant à quatre valeurs différentes du paramètre k, parmi les entiers -1, -3, 1 et 2.
   Identifier les courbes correspondant à ces valeurs en justifiant la réponse.



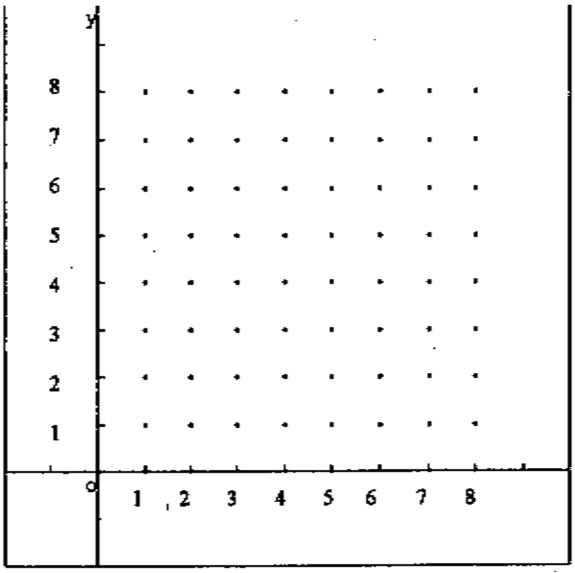
D – Calcul d'une aire plane

Soit λ un réel strictement positif. La fonction f est celle définie dans la partie B.

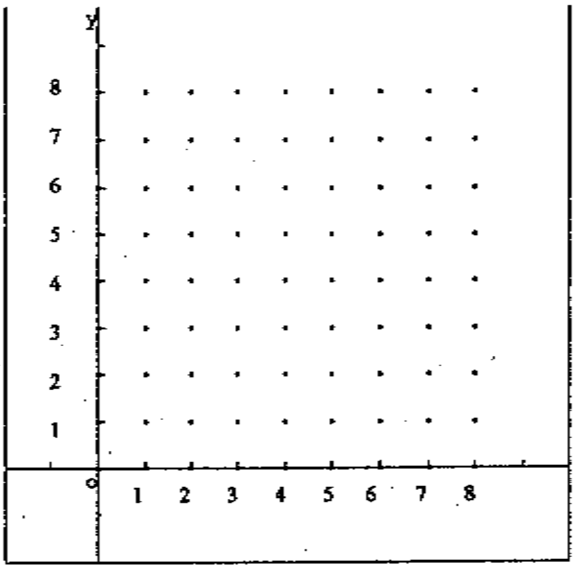
1. À l'aide d'une intégration par parties, calculer le nombre : $A(\lambda) = \int_0^{\lambda} f(t)\,\mathrm{d}t$.

2. Déterminer $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda)$. Interpréter graphiquement ce résultat.

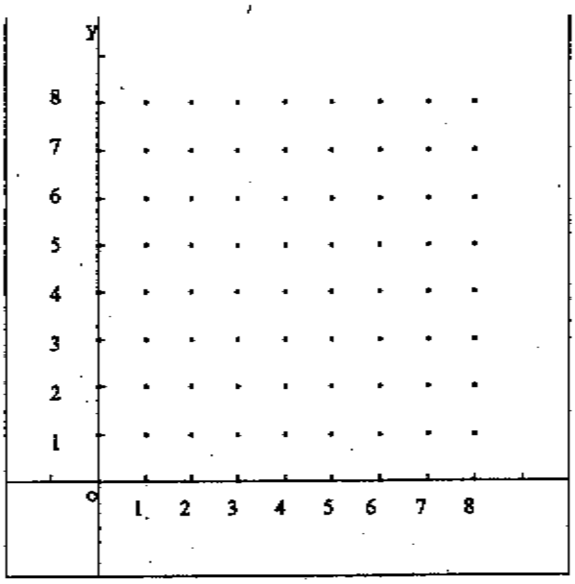
Annexe 1 – exercice 3 (Spécialité mathématiques) – À rendre avec la copie



Graphique 1



Graphique 2



Graphique 3