Durée : 4 heures

Baccalauréat S La Réunion juin 2008

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Tous les résultats seront arrondis à 10^{-2} près.

Une entreprise produit en grande quantité des stylos. La probabilité qu'un stylo présente un défaut est égale à 0,1.

1. On prélève dans cette production, successivement et avec remise huit stylos. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de stylos présentant un défaut parmi les huit stylos prélevés.

a. On admet que X suit une loi binomiale. Donner les paramètres de cette loi.

b. Calculer la probabilité des évènements suivants :
A : « il n'y a aucun stylo avec un défaut » ;
B : « il y a au moins un stylo avec un défaut » ;
C : « il y a exactement deux stylos avec un défaut ».

2. En vue d'améliorer la qualité du produit vendu, on décide de mettre en place un contrôle qui accepte tous les stylos sans défaut et 20 % des stylos avec défaut.
On prend au hasard un stylo dans la production. On note D l'évènement « le stylo présente un défaut », et E l'évènement « le stylo est accepté ».

a. Construire un arbre traduisant les données de l'énoncé.

b. Calculer la probabilité qu'un stylo soit accepté au contrôle.

c. Justifier que la probabilité qu'un stylo ait un défaut sachant qu'il a été accepté au contrôle est égale à 0,022 à 10^{-3} près.

3. Après le contrôle, on prélève, successivement et avec remise, huit stylos parmi les stylos acceptés.

Calculer la probabilité qu'il n'y ait aucun stylo avec un défaut dans ce prélèvement de huit stylos.
Comparer ce résultat avec la probabilité de l'évènement A calculée à la question **1. b.**. Quel commentaire peut-on faire ?

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Partie A

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}.$$

Sa courbe représentative $(\mathscr{C})$, construite dans un repère orthonormal, et son tableau de variations sont donnés en annexe,

1. Le tableau de variations de f donne des propriétés sur les variations de la fonction, les limites aux bornes de l'ensemble de définition ainsi que l'extremum.
   Énoncer puis démontrer ces propriétés.
2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Existe-t-il des tangentes à la courbe $(\mathcal{C})$ qui contiennent le point O origine du repère ? Si oui donner leur équation.

Partie B Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,\infty[$ par

$$g(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. **a.** Que représente f pour la fonction g ?
   b. En déduire le sens de variations de g sur $]0\,;\,\infty[$.
2. Interpréter géométriquement les réels $g(3)$ et $g\left(\frac{1}{2}\right)$.
3. **a.** À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $g(x) = 1 - \dfrac{\ln x + 1}{x}$.
   b. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

EXERCICE 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 5 \quad \text{et, pour tout entier } \ n \geqslant 1,\ u_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)u_{n-1} + \frac{6}{n}.$$

1. **a.** Calculer u_1.
   b. Les valeurs de u_2, u_3, u_4, u_5,u_6,u_7,u_8,u_9,u_{10},u_{11} sont respectivement égales à :
   45, 77, 117, 165, 221, 285, 357, 437, 525, 621.
   À partir de ces données conjecturer la nature de la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $d_n = u_{n+1} - u_n$.
2. On considère la suite arithmétique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison 8 et de premier terme $v_0 = 16$.
   Justifier que la somme des n premiers termes de cette suite est égale à $4n^2 + 12n$.
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a :
   $u_n = 4n^2 + 12n + 5$.
4. Valider la conjecture émise à la question **1. b.**.

EXERCICE 4 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de centre O et de rayon 1.
On considère le point A de $(\mathcal{C})$ d'affixe $z_{\text{A}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

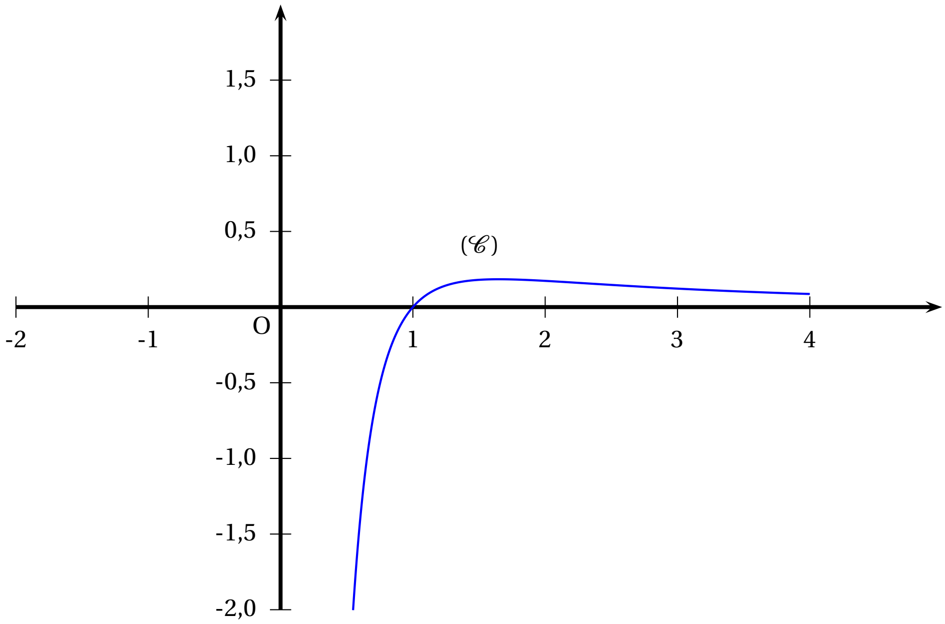
1. Déterminer l'affixe z_{B} du point B image de A par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.
   Déterminer l'affixe z_{C} du point C image de B par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

2. **a.** Justifier que $(\mathscr{C})$ est le cercle circonscrit au triangle ABC. Construire les points A, B et C sur la feuille de papier millimétré.
   b. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.
3. Soit h l'homothétie de centre O et de rapport -2.
   a. Compléter la figure en plaçant les points P, Q et R images respectives des points A, B et C par h.
   b. Quelle est la nature du triangle PQR ? Justifier.
4. *Dans cette question le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n'aboutit pas.*
   a. Donner l'écriture complexe de h.
   b. Calculer $z_{\text{A}} + z_{\text{B}} + z_{\text{C}}$. En déduire que A est le milieu du segment [QR].
   c. Que peut-on dire de la droite (QR) par rapport au cercle $(\mathscr{C})$?

EXERCICE 4 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
   Soient A, B et C les points d'affixes respectives
$$z_{\text{A}} = 2 + \text{i},\ \ z_{\text{B}} = 5 + 2\text{i}\ \text{ et }\ z_{\text{C}} = \text{i}.$$
   s_1 désigne la symétrie d'axe (AB).
   a. Démontrer que s_1 transforme tout point M d'affixe z en un point M' d'affixe z' telle que
$$z' = \left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5}\text{i}\right)\overline{z} + \left(-\frac{1}{5} + \frac{3}{5}\text{i}\right)$$
   b. En déduire l'affixe de C$'$, symétrique de C par rapport à (AB).
   c. Démontrer que l'ensemble des points M tels que z' est imaginaire pur est la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $4x + 3y = 1$.
   d. Vérifier que le point C$'$ appartient à $(\mathscr{D})$.
2. **a.** Démontrer que les droites $(\mathscr{D})$ et (AB) sont sécantes en un point Ω dont on précisera l'affixe ω.
   b. On désigne par s_2 la symétrie d'axe $(\mathscr{D})$ et par f la transformation définie par $f = s_2 \circ s_1$. Justifier que f est une similitude directe et préciser son rapport.
   c. Déterminer les images des points C et Ω par la transformation f.
   d. Justifier que f est une rotation dont on donnera le centre.
3. *Dans cette question le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n 'aboutit pas.*
   a. Déterminer les couples d'entiers relatifs $(x\ ;\ y)$ solutions de l'équation : $4x + 3y = 1$.
   b. Déterminer les points de $(\mathscr{D})$ à coordonnées entières dont la distance au point O est inférieure à 9.

ANNEXE exercice 2



x	0		$e^{\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$f(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2e}$	$\searrow$	0