

# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2008

**SUJET SORTI**

## MATHÉMATIQUES

Série S

ENSEIGNEMENT SPÉCIALISÉ

**spécialité**

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,  
conformément à la réglementation en vigueur.

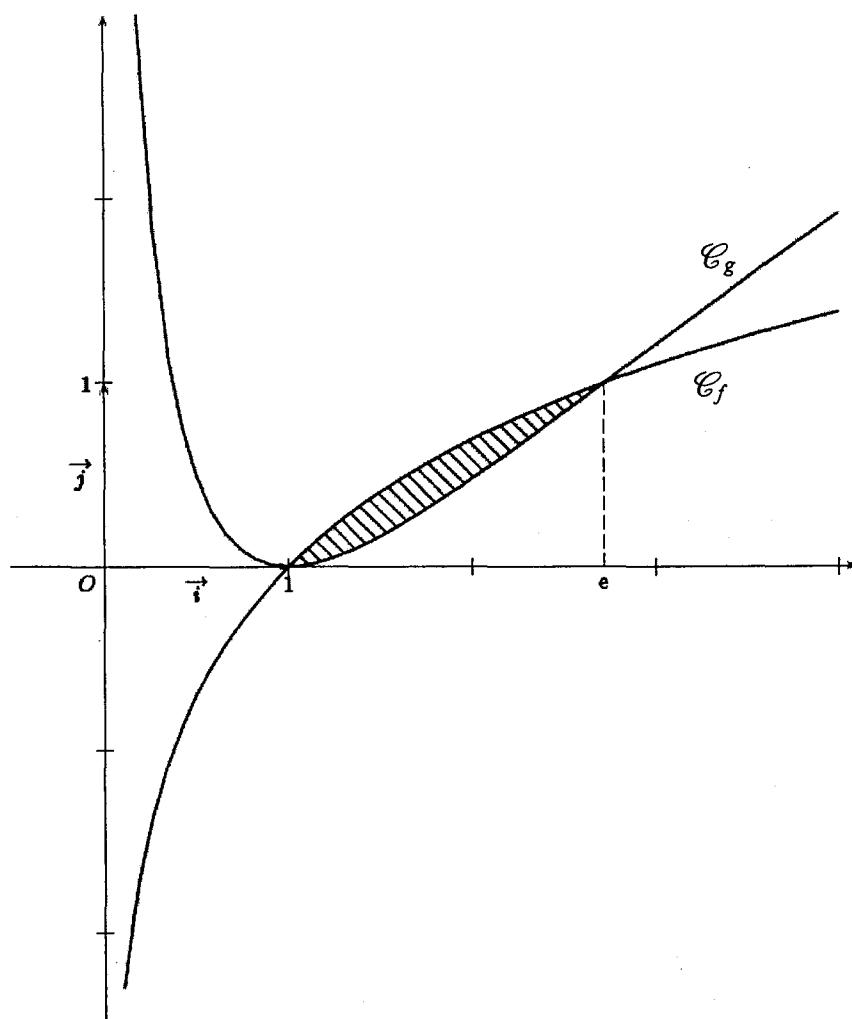
Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.  
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.  
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.

### EXERCICE 1 (5 points)

Commun à tous les candidats

Les courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  données ci-dessous représentent respectivement, dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = \ln x$  et  $g(x) = (\ln x)^2$ .



1) On cherche à déterminer l'aire  $A$  (en unités d'aire) de la partie du plan hachurée.

On note  $I = \int_1^e \ln x \, dx$  et  $J = \int_1^e (\ln x)^2 \, dx$ .

- Vérifier que la fonction  $F$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par  $F(x) = x \ln x - x$  est une primitive de la fonction logarithme népérien. En déduire  $I$ .
- Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que  $J = e - 2I$ .
- En déduire  $J$ .
- Donner la valeur de  $A$ .

2) Dans cette question le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n'aboutit pas.

Pour  $x$  appartenant à l'intervalle  $[1; e]$ , on note  $M$  le point de la courbe  $\mathcal{C}_f$  d'abscisse  $x$  et  $N$  le point de la courbe  $\mathcal{C}_g$  de même abscisse.

Pour quelle valeur de  $x$  la distance  $MN$  est maximale ? Calculer la valeur maximale de  $MN$ .

## **EXERCICE 2 (5 points)**

*Commun à tous les candidats*

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les points  $A(1, 1, 0)$ ,  $B(1, 2, 1)$  et  $C(3, -1, 2)$ .

- 1) a) Démontrer que les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  ne sont pas alignés.  
b) Démontrer que le plan  $(ABC)$  a pour équation cartésienne  $2x + y - z - 3 = 0$ .
- 2) On considère les plans  $(P)$  et  $(Q)$  d'équations respectives  $x + 2y - z - 4 = 0$  et  $2x + 3y - 2z - 5 = 0$ .

Démontrer que l'intersection des plans  $(P)$  et  $(Q)$  est une droite  $(\mathcal{D})$ , dont une représentation paramétrique

$$\text{est : } \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

- 3) Quelle est l'intersection des trois plans  $(ABC)$ ,  $(P)$  et  $(Q)$  ?
- 4) Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.  
Déterminer la distance du point  $A$  à la droite  $(\mathcal{D})$ .

## **EXERCICE 3 (5 points)**

*Commun à tous les candidats*

La durée de vie, exprimée en heures, d'un agenda électronique est une variable aléatoire  $X$  qui suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  où  $\lambda$  est un réel strictement positif.

On rappelle que pour tout  $t \geq 0$ ,  $P(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$ .

La fonction  $R$  définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par  $R(t) = P(X > t)$  est appelée fonction de fiabilité.

### 1) *Restitution organisée de connaissances*

- a) Démontrer que pour tout  $t \geq 0$  on a  $R(t) = e^{-\lambda t}$ .
- b) Démontrer que la variable  $X$  suit une loi de durée de vie sans vieillissement, c'est-à-dire que pour tout réel  $s \geq 0$ , la probabilité conditionnelle  $P_{X>t}(X > t + s)$  ne dépend pas du nombre  $t \geq 0$ .
- 2) Dans cette question, on prend  $\lambda = 0,00026$ .
  - a) Calculer  $P(X \leq 1000)$  et  $P(X > 1000)$ .
  - b) Sachant que l'événement  $(X > 1000)$  est réalisé, calculer la probabilité de l'événement  $(X > 2000)$ .
  - c) Sachant qu'un agenda a fonctionné plus de 2000 heures, quelle est la probabilité qu'il tombe en panne avant 3000 heures ? Pouvait-on prévoir ce résultat ?

#### **EXERCICE 4 (5 points)**

##### *Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

Soient  $A$  et  $B$  les points d'affixes respectives  $z_A = 1 - i$  et  $z_B = 7 + \frac{7}{2}i$ .

1) On considère la droite  $(d)$  d'équation  $4x + 3y = 1$ .

Démontrer que l'ensemble des points de  $(d)$  dont les coordonnées sont entières est l'ensemble des points  $M_k(3k + 1, -4k - 1)$  lorsque  $k$  décrit l'ensemble des entiers relatifs.

2) Déterminer l'angle et le rapport de la similitude directe de centre  $A$  qui transforme  $B$  en  $M_{-1}(-2, 3)$ .

3) Soit  $s$  la transformation du plan qui à tout point  $M$  d'affixe  $z$  associe le point  $M'$  d'affixe  $z' = \frac{2}{3}i z + \frac{1}{3} - \frac{5}{3}i$ .

Déterminer l'image de  $A$  par  $s$ , puis donner la nature et les éléments caractéristiques de  $s$ .

4) On note  $B_1$  l'image de  $B$  par  $s$  et pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $B_{n+1}$  l'image de  $B_n$  par  $s$ .

a) Déterminer la longueur  $AB_{n+1}$  en fonction de  $AB_n$ .

b) À partir de quel entier  $n$  le point  $B_n$  appartient t-il au disque de centre  $A$  et de rayon  $10^{-2}$  ?

c) Déterminer l'ensemble des entiers  $n$  pour lesquels  $A$ ,  $B_1$  et  $B_n$  sont alignés.