Durée : 4 heures

Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie mars 2008 (spécialité)

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur $]-\infty~;~6[$ par

$$f(x) = \frac{9}{6-x}$$

On définit pour tout entier naturel n la suite (U_n) par

$$\left\{\begin{array}{lcl} U_0 & = & -3 \\ U_{n+1} & = & f\left(U_n\right) \end{array}\right.$$

1. La courbe représentative de la fonction f est donnée sur la feuille jointe accompagnée de celle de la droite d'équation $y = x$. Construire, sur cette feuille annexe les points $M_0\left(U_0~;~0\right)$, $M_1\left(U_1~;~0\right)$, $M_2\left(U_2~;~0\right)$, $M_3\left(U_3~;~0\right)$ et $M_4\left(U_4~;~0\right)$.
Quelles conjectures peut-on formuler en ce qui concerne le sens de variation et la convergence éventuelle de la suite (U_n) ?

2. **a.** Démontrer que si $x < 3$ a alors $\dfrac{9}{6-x} < 3$.
En déduire que $U_n < 3$ pour tout entier naturel n.
   b. Étudier le sens de variation de la suite (U_n).
   c. Que peut-on déduire des questions 2. a. et 2. b. ?

3. On considère la suite (V_n) définie par $V_n = \dfrac{1}{U_n - 3}$ pour tout entier naturel n.
   a. Démontrer que la suite (V_n) est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$.
   b. Déterminer V_n puis U_n en fonction de n.
   c. Calculer la limite de la suite (U_n).

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

PARTIE A : Question de cours

Quelles sont les propriétés de compatibilité de la relation de congruence avec l'addition, la multiplication et les puissances ?
Démontrer la propriété de compatibilité avec la multiplication.

PARTIE B

On note 0, 1, 2, ..., 9, α, β, les chiffres de l'écriture d'un nombre en base 12. Par exemple :

$$\overline{\beta\alpha7}^{12} = \beta \times 12^2 + \alpha \times 12 + 7 = 11 \times 12^2 + 10 \times 12 + 7 = 1\,711 \text{ en base } 10$$

1. **a.** Soit N_1 le nombre s'écrivant en base 12 :

$$N_1 = \overline{\beta1\alpha}^{12}$$

Déterminer l'écriture de N_1 en base 10.

b. Soit N_2 le nombre s'écrivant en base 10 :

$$N_2 = 1\,131 = 1 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 3 \times 10 + 1$$

Déterminer l'écriture de N_2 en base 12.

Dans toute la suite, un entier naturel N s'écrira de manière générale en base 12 :

$$N = \overline{a_n \cdots a_1 a_0}^{12}$$

2. a. Démontrer que $N \equiv a_0 \quad (3)$. En déduire un critère de divisibilité par 3 d'un nombre écrit en base 12.

b. À l'aide de son écriture en base 12, déterminer si N_2 est divisible par 3. Confirmer avec son écriture en base 10.

3. a. Démontrer que $N \equiv a_n + \cdots + a_1 + a_0 \quad (11)$. En déduire un critère de divisibilité par 11 d'un nombre écrit en base 12.

b. À l'aide de son écriture en base 12, déterminer si N_1 est divisible par 11. Confirmer avec son écriture en base 10.

4. Un nombre N s'écrit $\overline{x4y}^{12}$. Déterminer les valeurs de x et de y pour lesquelles N est divisible par 33.

EXERCICE 3 — 5 points

Commun à tous les candidats

Deux éleveurs produisent une race de poissons d'ornement qui ne prennent leur couleur définitive qu'à l'âge de trois mois :

- pour les alevins du premier élevage, entre l'âge de deux mois et l'âge de trois mois, 10 % n'ont pas survécu, 75 % deviennent rouges et les 15 % restant deviennent gris.
- pour les alevins du deuxième élevage, entre l'âge de deux mois et l'âge de trois mois, 5 % n'ont pas survécu, 65 % diviennent rouges et les 30 % restant deviennent gris.

Une animalerie achète les alevins, à l'âge de deux mois : 60 % au premier éleveur, 40 % au second.

1. Un enfant achète un poisson le lendemain de son arrivée à l'animalerie, c'est-à-dire à l'âge de deux mois.

a. Montrer que la probabilité que le poisson soit toujours vivant un mois plus tard est de $0,92$.

b. Déterminer la probabilité qu'un mois plus tard le poisson soit rouge.

c. Sachant que le poisson est gris à l'âge de trois mois, quelle est la probabilité qu'il provienne du premier élevage ?

2. Une personne choisit au hasard et de façon indépendante 5 alevins de deux mois. Quelle est la probabilité qu'un mois plus tard, seulement trois soient en vie ? On donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

3. L'animalerie décide de garder les alevins jusqu'à l'âge de trois mois, afin qu'ils soient vendus avec leur couleur définitive. Elle gagne 1 euro si le poisson est rouge, $0,25$ euro s'il est gris et perd $0,10$ euro s'il ne survit pas.
Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique de l'animalerie par poisson acheté. Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique, arrondie au centime.

EXERCICE 4 — 5 points

Commun à tous les candidats

L'espace est rapporté à un repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ orthonormé. Soit t un nombre réel. On donne le point A$(-1\ ;\ 2\ ;\ 3)$ et la droite $\mathscr{D}$ de système d'équations paramétriques :

$$\left\{\begin{array}{l c l} x & = & 9+4t \\ y & = & 6+t \\ z & = & 2+2t \end{array}\right.$$

Le but de cet exercice est de calculer de deux façons différentes la distance d entre le point A et la droite $\mathscr{D}$.

1. **a.** Donner une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$, perpendiculaire à la droite $\mathscr{D}$ et passant par A.

   b. Vérifier que le point B$(-3\ ;\ 3\ ;\ -4)$ appartient à la droite $\mathscr{D}$.

   c. Calculer la distance d_{B} entre le point B et le plan $\mathscr{P}$.

   d. Exprimer la distance d en fonction de d_{B} et de la distance AB. En déduire la valeur exacte de d.

2. Soit M un point de la droite $\mathscr{D}$. Exprimer AM^2 en fonction de t. Retrouver alors la valeur de d.

ANNEXE (à rendre avec la copie)