BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2009

MATHÉMATIQUES

- Série ES -

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient : 5

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 7 pages numérotées de 1 à 7.

EXERCICE 1 (4 points)

Commun à tous les candidats

Cet exercice constitue un questionnaire à choix multiples. Les questions sont indépendantes les unes des autres. Pour chaque question, une seule des réponses est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Barème : Une réponse juste rapporte 0,5 point, une réponse fausse enlève 0,25 point, l'absence de réponse n'enlève et ne rapporte aucun point. Si le total des points de l'exercice est négatif, la note est ramenée à 0.

1) Le prix d'un article subit une première augmentation de 20 % puis une seconde augmentation de 30 %. Le prix de l'article a augmenté globalement de :

a) 25 % **b)** 50 % **c)** 56 %

2) Le nombre réel $\dfrac{\ln \mathrm{e}}{\ln(\mathrm{e}^2)}$ est égal à :

a) $\ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$ **b)** $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ **c)** $\dfrac{1}{2}$

3) Le nombre réel $\mathrm{e}^{-3\ln 2}$ est égal à

a) $\dfrac{1}{9}$ **b)** $\dfrac{1}{8}$ **c)** -8

4) Une primitive F de la fonction f définie sur **R** par $f(x) = \mathrm{e}^{-2x}$ est définie par :

a) $F(x) = -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}$ **b)** $F(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}$ **c)** $F(x) = -2\mathrm{e}^{-2x}$

5) Une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle au point d'abscisse 0 est :

a) $y = x+1$ **b)** $y = \mathrm{e}\,x$ **c)** $y = \mathrm{e}^x$

6) Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x+1}{\mathrm{e}^x - 1}$. La fonction f est définie sur :

a) **R** **b)** $]-\infty\,;\,0\,[\cup]0\,;\,+\infty[$ **c)** $]-1\,;\,+\infty[$

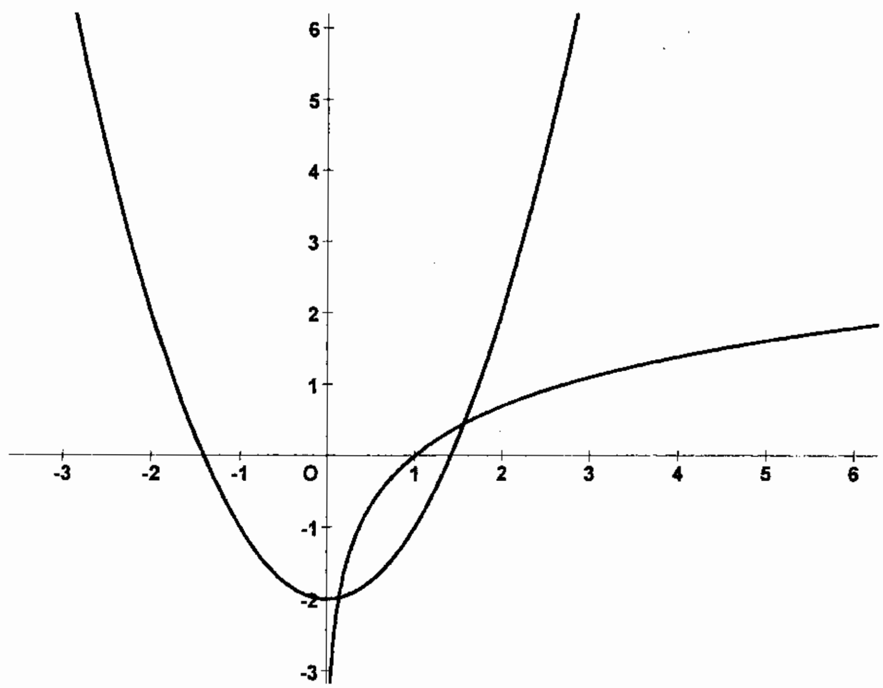
7) On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=2x-1+\dfrac{1}{2x}$.

Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction f admet au voisinage de $+\infty$:

- **a)** L'axe des abscisses comme asymptote horizontale
- **b)** La droite d'équation $y=2x$ comme asymptote oblique
- **c)** La droite d'équation $y=2x-1$ comme asymptote oblique

8) On considère la fonction logarithme népérien et la fonction f définie sur **R** par $f(x)=x^2-2$.
On donne ci-dessous les courbes représentatives de ces deux fonctions dans un repère orthogonal.
Dans **R**, l'équation $\ln x = x^2-2$ admet :

- **a)** Une solution
- **b)** Deux solutions de signes contraires
- **c)** Deux solutions positives



EXERCICE 2 (4 points)

Commun à tous les candidats

Un pépiniériste a planté trois variétés de fleurs dans une prairie de quelques hectares : des violettes, des primevères et des marguerites. Il se demande s'il peut considérer que sa prairie contient autant de fleurs de chaque variété. Il cueille au hasard 500 fleurs et obtient les résultats suivants :

Variétés	Violettes	Primevères	Marguerites
Effectifs	179	133	188

1) Calculer les fréquences f_V d'une fleur de variété Violette, f_P d'une fleur de variété Primevère et f_M d'une fleur de variété Marguerite. On donnera les valeurs décimales exactes.

2) On note $d^2_{obs} = \left(f_V - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(f_P - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(f_M - \frac{1}{3}\right)^2$.

Calculer $500d^2_{obs}$. On donnera une valeur approchée arrondie au millième.

3) Le Pépiniériste, ne voulant pas compter les quelques milliards de fleurs de sa prairie, opère sur ordinateur en simulant le comptage, au hasard, de 500 fleurs suivant la loi équirépartie. Il répète 2000 fois l'opération et calcule à chaque fois la valeur de $500d^2_{obs}$. Ses résultats sont regroupés dans le tableau suivant :

Intervalle auquel appartient $500d^2_{obs}$	$[0;0,5[$	$[0,5;1[$	$[1;1,5[$	$[1,5;2[$	$[2;2,5[$	$[2,5;3[$	$[3;3,5[$	$[3,5;4[$	$[4;4,5[$	$[4,5;5[$
Nombre par intervalle	163	439	458	350	231	161	80	47	37	34

Par exemple : le nombre $500d^2_{obs}$ apparaît 163 fois dans l'intervalle [0 ; 0,5[.

On note D_9 le neuvième décile de cette série statistique.

Montrer que $D_9 \in [2,5 ; 3[$.

4) En argumentant soigneusement la réponse, dire si pour la série observée au début, on peut affirmer avec un risque inférieur à 10 % que « la prairie est composée d'autant de fleurs de chaque variété ».

EXERCICE 3 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un nouveau bachelier souhaitant souscrire un prêt automobile pour l'achat de sa première voiture, a le choix entre les trois agences bancaires de sa ville : agence A, agence B et agence C. On s'intéresse au nombre de prêts automobiles effectués dans cette ville.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Dans le tableau suivant figure le nombre de prêts effectués dans l'agence B lors des premiers mois de 2009.

Mois	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin
Rang du mois x_i	1	2	3	4	5	6
Nombre de prêts y_i	56	44	42	52	50	56

1) En utilisant la calculatrice, donner une équation de la droite d'ajustement affine de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés.

2) Combien de prêts automobiles peut-on prévoir pour le mois de décembre 2009 avec cet ajustement ? On arrondira le résultat à l'entier le plus proche.

Partie B

Après vérification, on a constaté que :

20 % des prêts sont souscrits dans l'agence A,
45 % des prêts sont souscrits dans l'agence B,
les autres prêts étant souscrits dans l'agence C.

On suppose que tous les clients souscrivent à une assurance dans l'agence où le prêt est souscrit.
Deux types de contrats sont proposés : le contrat tout risque, dit *Zen* et le deuxième contrat appelé *Speed.*

80 % des clients de l'agence A ayant souscrit un prêt automobile, souscrivent une assurance *Zen.*
30 % des clients de l'agence B ayant souscrit un prêt automobile, souscrivent une assurance *Zen.*
$\frac{2}{7}$ des clients de l'agence C ayant souscrit un prêt automobile, souscrivent une assurance *Speed.*

On interroge au hasard un client d'une de ces trois banques ayant souscrit un contrat d'assurance automobile.

On considère les événements suivants :

A : « le prêt a été souscrit dans l'agence A »,
B : « le prêt a été souscrit dans l'agence B »,
C : « le prêt a été souscrit dans l'agence C »,
Z : « le contrat d'assurance *Zen* a été souscrit»,
S : « le contrat d'assurance *Speed* a été souscrit».

Dans tout l'exercice, on donnera les valeurs exactes.

1) Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

2) Déterminer la probabilité que le client interrogé ait souscrit un prêt automobile avec une assurance Zen dans l'agence A.

3) Vérifier que la probabilité de l'événement Z est égale à 0,545.

4) Le client a souscrit une assurance *Zen*.
Déterminer la probabilité que le prêt soit souscrit dans l'agence C.

EXERCICE 4 (7 points)

Commun à tous les candidats

Les parties A et B sont indépendantes. Le candidat pourra utiliser les résultats préliminaires dans la partie A, même s'il ne les a pas établis.

Préliminaires

On admet les éléments du tableau de signes ci-dessous.

x	0		1		$+\infty$
Signe de $\dfrac{6}{x}-6x^2$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

Soit g la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x)=6\ln x-2x^3-3$. On désigne par g' la fonction dérivée de g.

1) Calculer $g'(x)$.

2) En utilisant **1)**, déterminer le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$. On ne demande pas les limites dans cette question.

3) En déduire que $g(x)<0$ pour tout $x \in\ ]0\ ;\ +\infty[$.

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x)=x+\dfrac{3\ln x}{2x^2}$.

1) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en 0.

2) On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.

a) Montrer que, pour tout $x \in\ ]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x)=-\dfrac{g(x)}{2x^3}$.

b) En déduire le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Partie B

1) On définit la fonction F sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $F(x)=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{3}{2}\times\dfrac{1+\ln x}{x}$.

Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

2) On a représenté ci-dessous, dans un repère orthogonal, la courbe représentative de f notée C_f.
On a colorié le domaine limité par C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.
Donner la valeur exacte, exprimée en unités d'aire, de l'aire de ce domaine, puis une valeur approchée arrondie au centième.