Bac ES – Antilles-Guyane – juin 2009

Exercice 1 (*4 points*)

Commun à tous les candidats

PARTIE A : aucune justification n'est demandée

Cette partie est un questionnaire à choix multiplies. Pour chacune des questions, trois réponses sont proposées. ***Une seule*** *de ces réponses est exacte.*
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Une réponse exacte rapporte 0,5 point.
Une réponse fausse enlève 0,25 point.
L'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.
Si le total des points de la partie A est négatif, la note attribuée à cette partie est ramenée à zéro.

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (-x + 2)e^{-x}$.

1. La limite de la fonction f en $+\infty$ est égale à :	a. $-\infty$
	b. 0
	c. $+\infty$
2. L'équation $f(x) = 0$:	a. n'admet aucune solution dans $\mathbb{R}$
	b. admet une seule solution dans $\mathbb{R}$
	c. admet deux solutions dans $\mathbb{R}$
3. L'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 est :	a. $y = -3x + 2$
	b. $y = -x + 2$
	c. $y = x + 2$
4. Le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est :	a. $\dfrac{1}{e^{3}}$
	b. $\dfrac{-1}{e^{3}}$
	c. $\dfrac{1}{e^{-3}}$

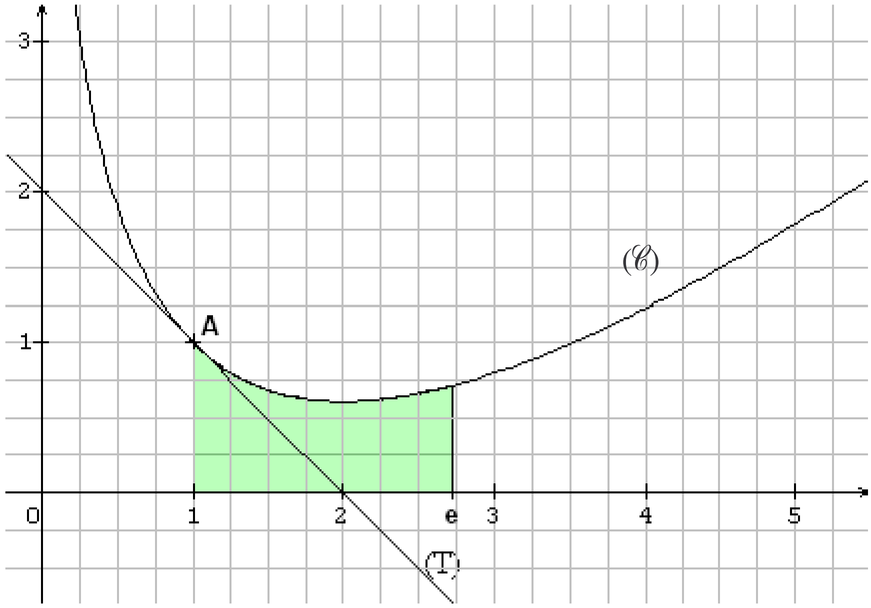
PARTIE B : la réponse devra être justifiée

La fonction f est celle définie dans la partie A. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite Δ d'équation $y = -x + 2$ sur l'intervalle $]0\ ;\ 2[$.

Exercice 2 (*6 points*) **Commun à tous les candidats**

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

On considère la fonction f définie sur $]0\ ;+\infty[$ dont on donne la représentation graphique $(\mathscr{C})$ dans le repère ci-dessous.



On admet que :

- le point A de coordonnées (1 ; 1) appartient à $(\mathscr{C})$;
- la tangente (T) en A à la courbe $(\mathscr{C})$ passe par le point de coordonnées (2 ; 0) ;
- la courbe $(\mathscr{C})$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 2 ;
- l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$ de la fonction f.

Partie A

1. Donner, par lecture graphique ou en utilisant les données de l'énoncé, les valeurs de $f(1)$, $f'(1)$ et $f'(2)$, où f' est la fonction dérivée de f sur $]0\ ;+\infty[$.

2. On admet que l'expression de $f(x)$ sur $]0\ ;+\infty[$ est : $f(x) = ax + b + c\ln x$ où a, b et c sont des nombres réels.

a. Calculer $f'(x)$ en fonction de x et de a, b et c.

b. Démontrer que les réels a, b et c vérifient le système $\begin{cases} a+b=1 \\ a+c=-1 \\ a+\dfrac{c}{2}=0 \end{cases}$.

c. Déduire de la question précédente les valeurs de a, b et c, puis l'expression de $f(x)$.

Partie B

Dans cette partie, on admet que la fonction f représentée ci-dessus est définie pour tout réel x appartenant à $]0\ ;+\infty[$ par : $f(x) = x - 2\ln x$.

1. Justifier que l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe représentative de f.

2. a. Calculer la dérivée g' de la fonction g définie pour tout réel $x \in\ ]0\ ;+\infty[$ par : $g(x) = x\ln x - x$.

b. En déduire une primitive F de la fonction f sur $]0\ ;+\infty[$.

c. Déterminer la valeur exacte, en unités d'aires, de l'aire du domaine grisé sur le graphique ci-dessous, délimité par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.

Exercice 3 (*5 points*)

Commun à tous les candidats

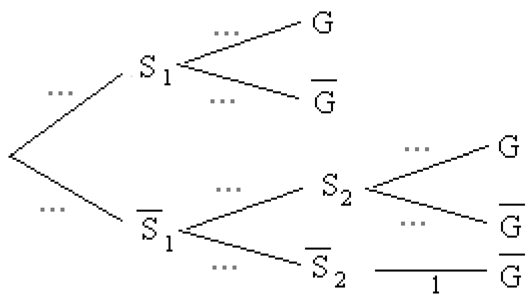
Au tennis, le joueur qui « est au service » joue une première balle.
Si elle est jugée « bonne », il joue l'échange et peut gagner ou perdre.
Si elle est jugée « faute », il joue une deuxième balle.
Si cette deuxième balle est jugée « bonne », il joue l'échange et peut gagner ou perdre.
Si cette deuxième balle est jugée « faute », il perd.

On désigne par : S_1 l'événement « la 1^{re} balle de service est « bonne » » ;
S_2 l'événement « la 2^{e} balle de service est « bonne » » ;
G l'événement « le point est gagné par le joueur qui est au service ».

Pour le joueur Naderer qui est au service, on dispose des données suivantes :
- sa première balle de service est jugée « bonne » dans 40 % des cas ;
- sa deuxième balle de service est jugée « bonne » dans 95 % des cas ;
- si sa première balle de service est jugée « bonne », il gagne l'échange dans 80 % des cas ;
- si sa deuxième balle de service est jugée « bonne », il gagne l'échange dans 60 % des cas.

Pour tout événement A, on note $\overline{A}$ l'événement contraire.

1. Recopier et compléter l'arbre suivant :



2. Calculer $p(S_1 \cap G)$.

3. Montrer que la probabilité que le joueur Naderer gagne l'échange est de 0,662.

4. Sachant que le joueur Naderer a gagné l'échange, calculer la probabilité que sa première balle de service ait été jugée « bonne ». Le résultat sera arrondi au millième.

5. Calculer la probabilité que le joueur Naderer gagne quatre échanges consécutifs. On donnera le résultat arrondi au millième.

Exercice 4 (*5 points*)

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

D'après l'INSEE, l'indice du chiffre d'affaires du secteur de Bâtiment gros œuvre (base 100 en 2000) a évolué entre 2000 et 2007 de la manière suivante :

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Rang de l'année x_i, $0 \leqslant i \leqslant 7$	0	1	2	3	4	5	6	7
Indice y_i, $0 \leqslant i \leqslant 7$	100	105,6	106,9	110,8	121,3	132,5	145,5	161,8

Partie 1 : Un ajustement affine est –il possible ?

1. Dans un repère orthogonal, représenter le nuage de points $(x_i\,;\,y_i)$ $0 \leqslant i \leqslant 7$ (unités graphiques : 2 cm pour 1 année sur l'axe des abscisses ; 2 cm pour 10 unités d'indice sur l'axe des ordonnées, en graduant ce dernier à partir de $y = 90$).
2. Expliquer pourquoi un ajustement affine de ce nuage de points ne parait pas approprié.

Partie 2 : On essaie un autre ajustement

1. Recopier et compléter le tableau ci-dessous ; on donnera les résultats à 10^{-2}.

x_i, $0 \leqslant i \leqslant 7$	0	1	2	3	4	5	6	7
$z_i = \ln y_i$, $0 \leqslant i \leqslant 7$								

2. **a.** À l'aide de la calculatrice, donner une équation de la droite d'ajustement de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés : les coefficients seront arrondis au centième.

   b. En déduire une expression de y en fonction de x sous la forme $y = \mathrm{A}\times \mathrm{e}^{\mathrm{B}x}$ où A et B sont des réels.

   c. Dans le repère précédent, représenter la fonction f définie par $f(x) = 95{,}6\times\mathrm{e}^{0{,}07x}$.

   d. À l'aide de ce modèle, donner une estimation de l'indice du chiffre d'affaires du secteur du Bâtiment gros œuvre pour l'année 2009.

Partie 3 : Ce nouvel ajustement permet-il de prévoir l'avenir ?

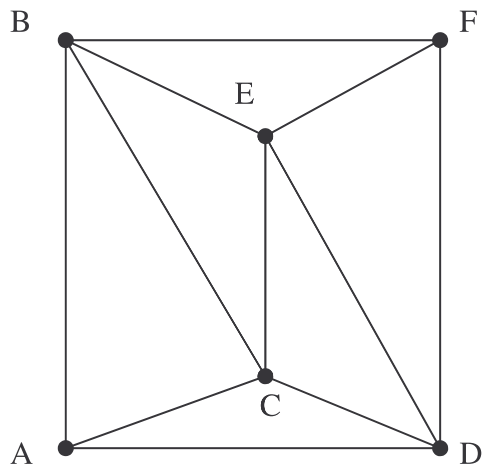
« Baisse des permis de construire et donc des mises en chantier, stocks de logements neufs trop importants, hausse des taux d'intérêts, des coûts des matériaux et de la main d'œuvre … À en croire le numéro 1 de l'assurance crédit en France, qui publiait jeudi son étude intitulée « *Immobilier, construction : à quand la sortie de crise ?* », le BTP français donne des signes de faiblesse et doit s'attendre selon l'assureur, tout d'abord à une dégradation de sa rentabilité ».

À la lecture de cette analyse faite en avril 2008, peut-on utiliser le modèle exponentiel de la partie 2 pour pronostiquer le chiffre d'affaires du secteur bâtiment gros œuvre en 2009 ?

Exercice 4 (*5 points*)

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On considère le graphe suivant :



1. Le graphe G est-il connexe ? Expliquer la réponse.
2. Le graphe G admet-il des chaînes eulériennes ? Si oui, en préciser une.
3. Justifier la non-existence d'un cycle eulérien pour le graphe G. Quelle arête peut-on alors ajouter à ce graphe pour obtenir un graphe contenant un cycle eulérien ?
4. Déterminer un encadrement du nombre chromatique du graphe G. Justifier la réponse.
5. Déterminer alors ce nombre chromatique, en explicitant clairement la démarche.
6. Déterminer la matrice M associée à ce graphe (les sommets sont pris dans l'ordre alphabétique).
7. On donne $M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 8 & 10 & 6 & 5 \\ 10 & 6 & 11 & 6 & 11 & 10 \\ 8 & 11 & 8 & 11 & 11 & 6 \\ 10 & 6 & 11 & 6 & 11 & 10 \\ 6 & 11 & 11 & 11 & 8 & 8 \\ 5 & 10 & 6 & 10 & 8 & 4 \end{pmatrix}$.

   Déterminer le nombre de chaînes de longueur 3 partant du sommet A et aboutissant au sommet F. Citer alors toutes ces chaînes.