Bac ES – Antilles-Guyane – septembre 2009

<u>Exercice 1</u> (5 points)
(*Commun à tous les candidats*)

1) « Un accroissement de population de 1,8 par an peut paraître faible, il correspond pourtant à un doublement de la population en 40 ans ».
Cette affirmation est-elle exacte ? Justifier.

2) D'après l'INED (Institut National d'Etudes Démographiques), la population mondiale a suivi l'évolution suivante :

Année	1960	1970	1980	1990	2000
Rang : x_i	0	10	20	30	40
Population : y_i en millions d'habitants	3 014	3 683	4 453	5 201	6 080

a. Calculer T, le taux d'évolution en pourcentage de la population mondiale entre 1960 et 2000 (arrondir à 0,1 % près).
b. On appelle t le taux d'évolution moyen annuel, en %, entre 1960 et 2000.
Montrer que t vérifie $\left(1+\frac{t}{100}\right)^{40} \approx 2{,}017$.
En déduire une valeur approchée de t (arrondie au dixième de pourcentage).

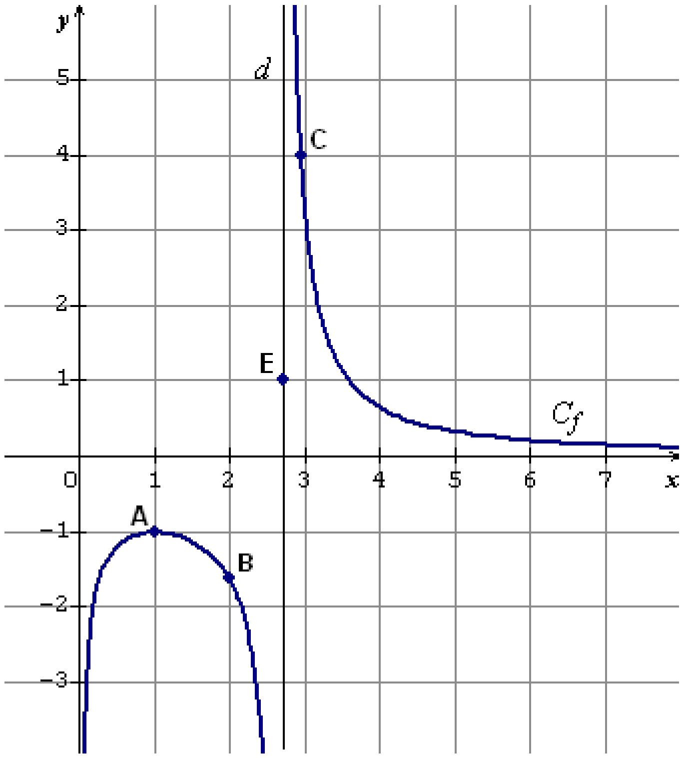
3) On suppose qu'à partir de l'an 2000, le taux d'évolution annuel de la population reste consant et égal à 1,8 %.
Donner une estimation de la population mondiale en 2008 à 100 millions près.

4) a. On décide de modéliser les données du tableau ci-dessus avec un ajustement affine.
A l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite d'ajustement de y en x par la méthode des moindres carrés.
b. Calculer la population mondiale en millions d'habitants qui aurait dû être atteinte en 2008 d'après ce modèle (à 100 millions près).

5) En fait, en 2008 on vient de dépasser 6,5 milliards d'habitants.
Des deux estimations précédentes, laquelle est la plus proche de la réalité ?

<u>Exercice 2</u> (4 points)
(*Commun à tous les candidats*)

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Aucune justification n'est demandée. Reporter sur votre copie le numéro de la question suivi de la réponse choisie.
Une bonne réponse rapporte 1 point, une mauvaise réponse enlève 0,5 point. L'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Si le total de l'exercice est négatif, la note attribuée à l'exercice est ramenée à 0.



On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ \mathrm{e}[\ \cup\ ]\mathrm{e}\ ;\ +\infty[$ et représentée par la courbe $\mathscr{C}_f$ ci-dessus.

La fonction f est dérivable sur chacun des intervalles de son ensemble de définition.

Les points A $(1\ ;\ -1)$ et B $\left(2\ ;\ \dfrac{1}{2\ln 2 - 2}\right)$ appartiennent à $\mathscr{C}_f$.

On désigne par C le point de $\mathscr{C}_f$ d'ordonnée 4.

La courbe admet pour asymptotes les axes du repère ainsi que la droite d parallèle à l'axe des ordonnées passant par le point E $(\mathrm{e}\ ;\ 1)$.

Pour chacun des questions ci-dessous une seule est exacte ; indiquer sur votre copie le numéro de la question et recopier la bonne affirmation sans justifier votre choix.

1) $f(-1) = 1$ $\qquad$ $f(x) = 0$ possède une solution sur $]0\ ;\ \mathrm{e}[\ \cup\ ]\mathrm{e}\ ;\ 6[$ $\qquad$ $f(1) = -1$

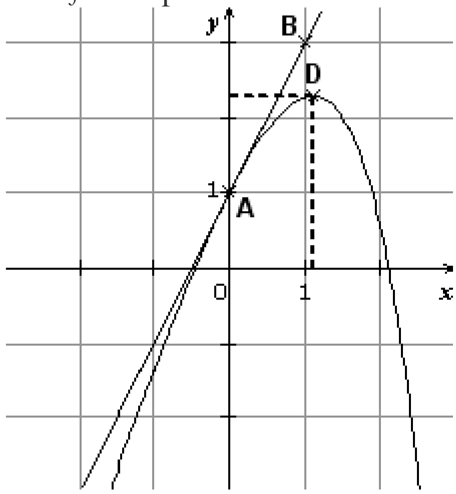
2) Une équation d'une des asymptotes de $\mathscr{C}_f$ est : $\qquad$ $y = \mathrm{e}$ $\qquad$ $x = \mathrm{e}$ $\qquad$ $y = -1$

3) $f'(4) < 0$ $\qquad$ $f'(4) = 0{,}7$ $\qquad$ $f'(4) = 2{,}9$

4) $\displaystyle\int_5^6 f(x)\,\mathrm{d}x < \int_4^5 f(x)\,\mathrm{d}x$ $\qquad$ $\displaystyle\int_5^6 f(x)\,\mathrm{d}x > \frac{1}{2}$ $\qquad$ La valeur moyenne de f sur $[4\ ;\ 5]$ est 2.

Exercice 3 (6 points)
(*Commun à tous les candidats*)

On considère une fonction f définie sur l'intervalle [–2 ; 3] par : $f(x) = a\,e^{x} + bx + c$ où a, b et c sont des réels fixés.
Une partie de la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f est représentée ci-dessous :



On dispose des renseignements suivants :

- $\mathscr{C}$ passe par A (0 ; 1) ;
- B est le point de coordonnées (1 ; 3) ; la droite (AB) est tangente à $\mathscr{C}$ au point A ;
- $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale au point D d'abscisse ln3.

1) On désigne par f' la dérivée de la fonction f. Traduire les renseignements précédents par trois égalités utilisant f où f'.

2) En résolvant un système, déterminer a, b et c.

3) On admet à partir de maintenant que $f(x) = -e^{x} + 3x + 2$
   a. Etudier les variations de f sur l'intervalle [–2 ; 3].
   b. Montrer que f s'annule exactement une fois sur [–2 ; ln3] en un réel α.
   Donner, en justifiant, une valeur approchée au centième près de α.
   c. Pour la suite, on admet que f s'annule exactement une fois sur [ln3 ; 3] en un réel β.
   Déterminer le signe de f sur l'intervalle [–2 ; 3].

4) a. Déterminer une primitive de f sur l'intervalle [–2 ; 3].
   b. On considère la surface S délimitée par l'axe des ordonnées, l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et la droite d'équation $x = \ln 3$.
   Hachurer S sur la figure.
   c. Déterminer, en justifiant avec soin, l'aire de S, en unités d'aire.
   On donnera la valeur exacte et la valeur décimale arrondie au centième.

<u>Exercice 4</u> (5 points)
(*Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*)

Partie A

Dans une résidence de vacances d'été, les touristes vont tous les jours à la plage. Ils disposent pour se déplacer de deux moyens de locomotion : un minibus ou des bicyclettes. Le séjour dure un mois pour tous les vacanciers.
Chaque jour, ils peuvent modifier leur choix de transport. Le premier jour, 80 % des touristes choisissent le minibus.
On considère qu'ensuite, chaque jour, 30 % de ceux qui ont pris le minibus la veille choisissent la bicyclette et 15 % des vacanciers qui avaient emprunté la bicyclette la veille, choisissent le minibus.
Soit n un entier entre 1 et 31.
On appelle $P_n = (a_n \quad b_n)$ la matrice traduisant l'état probabiliste reliant au n-ième jour, où :

a_n représente la proportion de vacanciers choisissant le minibus le jour n ;
b_n représente la proportion de vacanciers choisissant la bicyclette le jour n.

1) Représenter cette situation par un graphe probabiliste.

2) Ecrire la matrice de transition, notée M, associée à cette situation.

3) Déterminer l'état initial P_1.

4) a. Calculer P_2 (faire apparaître les calculs). Interpréter le résultat obtenu.
b. On suppose que $M^5 = \begin{pmatrix} 0{,}367 & 0{,}633 \\ 0{,}317 & 0{,}683 \end{pmatrix}$ et $M^6 = \begin{pmatrix} 0{,}352 & 0{,}648 \\ 0{,}324 & 0{,}676 \end{pmatrix}$, les coefficients ayant été arrondis au millième.
En utilisant la matrice qui convient, déterminer la répartition prévisible le 6ème jour.
On donnera le résultat en pourcentage arrondi à 1 % près.

5) Soit $P = (x \quad y)$ la matrice correspondant à l'état stable.
Déterminer x et y ; en donner une interprétation.

6) Montrer que pour n entier compris entre 1 et 30 on a : $a_{n+1} = 0{,}55\, a_n + 0{,}15$.

Partie B

Pour n entier, $n \geqslant 1$, on définit la suite (u_n) par : $u_{n+1} = 0{,}55\, u_n + 0{,}15$ et $u_1 = 0{,}8$.

1) On pose $U_n = u_n - \dfrac{1}{3}$
Montrer que la suite (U_n) est géométrique ; On précisera la raison et le premier terme de cette suite.

2) Exprimer u_n puis un en fonction de n.

3) En déduire la limite de la suite (u_n). Quel résultat retrouve-t-on ?