BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2009

MATHÉMATIQUES

SPECIALITE

Série : ES

Durée de l'épreuve : 3 heures.

Coefficient : 7

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7.

L'annexe en page 7 est à rendre avec la copie.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

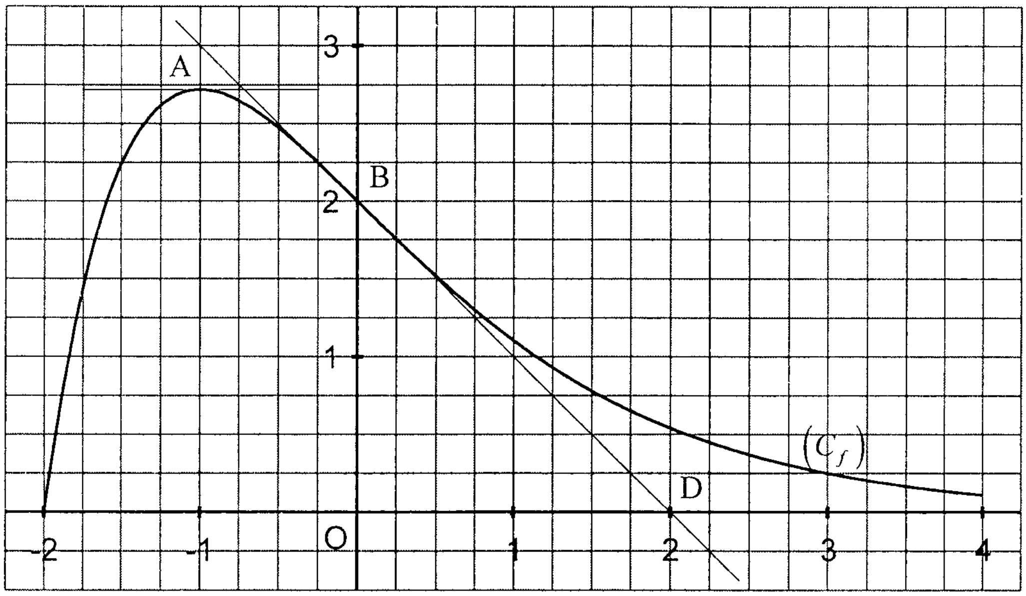
L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le sujet est composé de QUATRE exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (5 points)
(Commun à tous les candidats)

On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-2\ ;\ 4]$.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
La courbe (C_f), tracée ci-dessous, représente la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.
On note e le nombre réel tel que $\ln e = 1$. La courbe (C_f) passe par les points B (0 ; 2) et A (−1; e).
Elle admet au point A une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
La tangente (T) au point B à la courbe (C_f) passe par le point D (2 ; 0).



1. En utilisant les données graphiques, donner **sans justifier** :

a. le nombre de solutions sur l'intervalle $[-2\ ;\ 4]$ de l'équation $f(x) = 1$ et un encadrement d'amplitude 0,25 des solutions éventuelles.

b. la valeur de $f'(-1)$.

c. le signe de la dérivée f' de la fonction f sur l'intervalle $[-2\ ;\ 4]$.

2. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète ou d'initiative même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.*

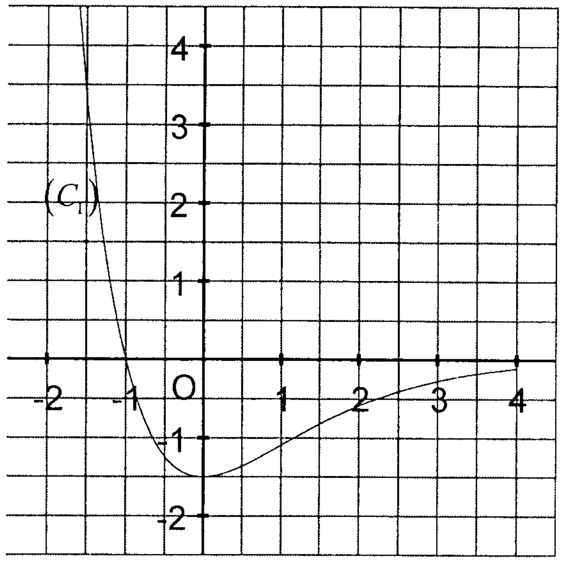
Donner **en justifiant** :

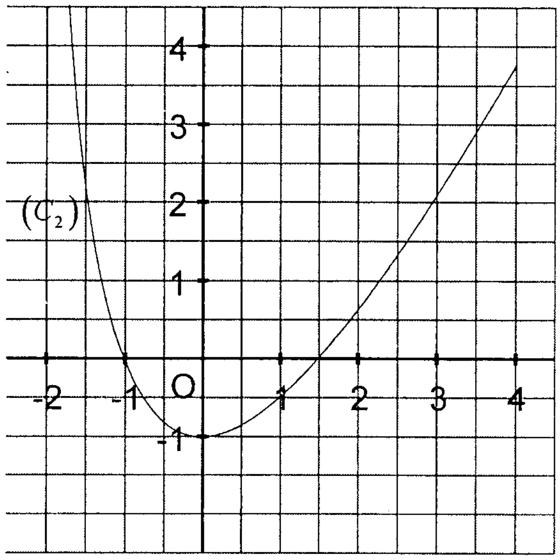
a. le coefficient directeur de la tangente (T).

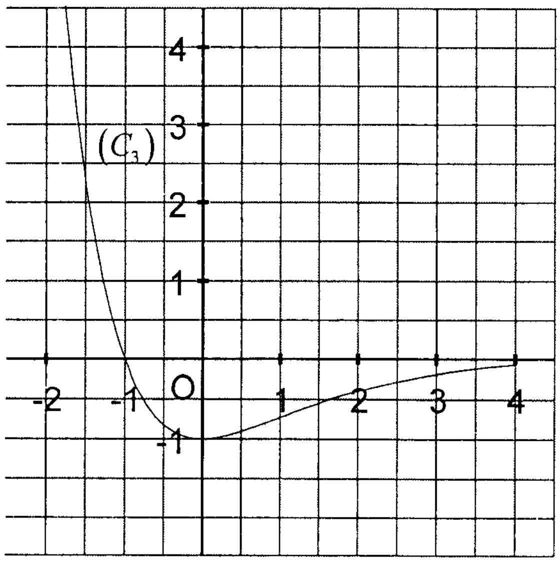
b. l'encadrement par deux entiers naturels consécutifs de l'intégrale $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$.

c. celle des trois courbes (C_1), (C_2) et (C_3) données en **annexe** qui représente la fonction dérivée f' de la fonction f.

Annexe de l'exercice 1







Exercice 2 (5 points)
(pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k}\ \right)$.

Sur le dessin joint en annexe, on a placé les points A $(0\,;2\,;0)$, B $(0\,;0\,;6)$, C $(4\,;0\,;0)$, D $(0\,;4\,;0)$ et E $(0\,;0\,;4)$.

Soit (P) le plan d'équation $3y+z=6$.

Il est représenté par ses traces sur les plans de base sur le dessin joint en annexe.

1. a. Démontrer que les points C, D et E déterminent un plan que l'on notera (CDE).

b. Vérifier que le plan (CDE) a pour équation $x+y+z=4$.

2. a. Justifier que les plans (P) et (CDE) sont sécants. On note (Δ) leur intersection.

b. Sans justifier, représenter (Δ) en couleur (ou à défaut en traits pointillés) sur la figure en annexe.

3. On considère les points F $(2\,;0\,;0)$ et G $(0\,;3\,;0)$.

On note (Q) le plan parallèle à l'axe $\left(O\,;\vec{k}\right)$ et contenant les points F et G.

a. Placer sur la figure en annexe les points F et G.

Sans justifier, représenter le plan (Q) par ses traces sur les plans de base, d'une autre couleur (ou à défaut en larges pointillés), sur la figure en annexe.

b. Déterminer les réels a et b tels que $ax+by=6$ soit une équation du plan (Q).

4. L'intersection des plans (CDE) et (Q) est la droite (Δ').

Sans justifier, représenter la droite (Δ'), d'une troisième couleur (ou à défaut en très larges pointillés), sur la figure en annexe.

5. On considère le système de trois équations à trois inconnues suivant :

$$\begin{cases} 3y+z=6 \\ x+y+z=4 \\ 3x+2y=6 \end{cases}$$

a. Résoudre ce système.

b. Que peut-on alors en déduire pour les droites (Δ) et (Δ') ?

<u>Exercice 3</u> (5 points)
(Commun à tous les candidats)

Pour établir le prix unitaire le plus adapté d'un produit, une société effectue une étude statistique. Le tableau suivant indique le nombre d'acheteurs, exprimé en milliers, correspondant à un prix unitaire donné, exprimé en euros :

Prix en euros : x_i	4	5	6	7	8	9	10	11
Nombre d'acheteurs en milliers : y_i	125	120	100	80	70	50	40	25

1. Représenter le nuage des points $M_i\,(x_i\,;\ y_i)$ dans le plan (P) muni d'un repère orthogonal d'unités graphiques 1 cm pour un euro sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 10 milliers d'acheteurs sur l'axe des ordonnées.

2. **a.** Déterminer l'équation $y = ax + b$ de la droite (D) d'ajustement affine de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés. Les coefficients a et b seront arrondis à l'unité.

b. Tracer la droite (D) dans le plan (P).

c. En utilisant l'ajustement affine précédent, estimer graphiquement, à l'euro près, le prix unitaire maximum que la société peut fixer si elle veut conserver des acheteurs.

3. **a.** En utilisant l'ajustement affine précédent, justifier que la recette $R(x)$, exprimée en milliers d'euros, en fonction du prix unitaire x d'un objet, exprimé en euros, vérifie :

$$R(x) = -15x^2 + 189x.$$

b. Étudier le sens de variation de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par

$$f(x) = -15x^2 + 189x.$$

c. Quel conseil peut-on donner à la société ? Argumenter la réponse.

Exercice 4 (5 points)
(*Commun à tous les candidats*)

On considère la fonction f définie pour tout nombre réel x par $f(x)=(x^2-x+1)e^{-x}$.

On note (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans le plan (P) muni d'un repère orthogonal.

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

b. En remarquant que, pour tout nombre réel x, $f(x)=\frac{x^2}{e^x}-\frac{x}{e^x}+\frac{1}{e^x}$, déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

Interpréter graphiquement le résultat.

2. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

a. Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = (-x^2+3x-2)e^{-x}$.

b. Établir le tableau de variation de la fonction f sur l'ensemble des nombres réels.

3. Donner une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) en son point d'abscisse 0.

4. On prend comme unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 20 cm sur l'axe des ordonnées.
Tracer la droite (T) et la courbe (C_f) sur l'intervalle $[0\,;\,8]$ dans le plan (P).

5. **a.** Déterminer graphiquement le nombre de solutions sur l'intervalle $[0\,;\,8]$ de l'équation $f(x)=0,4$.

b. À l'aide de la calculatrice, donner la valeur arrondie au centième de la plus grande des solutions de l'équation considérée à la question 5.a.

Annexe de l'exercice 2
À rendre avec la copie