BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2009

MATHÉMATIQUES

Série : **ES**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures.** – COEFFICIENT : 7

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter tous les exercices.
Il est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (*5 points*)

Commun à tous les candidats

Partie A

Cette première partie est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes trois réponses sont proposées, une seule de ces réponses convient.

Sur votre copie, noter le numéro de la question et recopier la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée. Une seule réponse est acceptée.

Barème : Une réponse exacte rapporte 0,75 point, une réponse inexacte enlève 0,25 point ; l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Si le total donne un nombre négatif, la note attribuée à cette partie sera ramenée à zéro.

Rappel de notations : $p(\mathrm{A})$ désigne la probabilité de A, $p_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$ désigne la probabilité conditionnelle de A sachant B, $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$ signifie la probabilité de « A ou B » et $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$ signifie la probabilité de « A et B ».

1. On lance un dé cubique équilibré. Les faces sont numérotées de 1 à 6.
   La probabilité d'obtenir une face numérotée par un multiple de 3 est
   - $\frac{1}{6}$
   - $\frac{1}{3}$
   - $\frac{1}{2}$

2. Soient A et B deux événements tels que $p(\mathrm{A}) = 0{,}2$, $p(\mathrm{B}) = 0{,}3$ et $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0{,}1$; alors
   - $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = 0{,}4$
   - $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = 0{,}5$
   - $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = 0{,}6$

3. Soient A et B deux événements indépendants de probabilité non nulle, alors on a obligatoirement :
   - $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0$
   - $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = p_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$
   - $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) \times p(\mathrm{B})$

4. Une expérience aléatoire a trois issues possibles : 2 ; 3 et a (où a est un réel).
   On sait que $p(2) = \frac{1}{2}$, $p(3) = \frac{1}{3}$ et $p(a) = \frac{1}{6}$.
   On sait de plus que l'espérance mathématique associée est nulle. On a alors
   - $a = -12$
   - $a = 6$
   - $a = -5$

Partie B

Dans cette partie toutes les réponses seront justifiées.

Dans un club de sport, Julien joue au basket. Il sait que lors d'un lancer sa probabilité de marquer un panier est égale à 0,6.

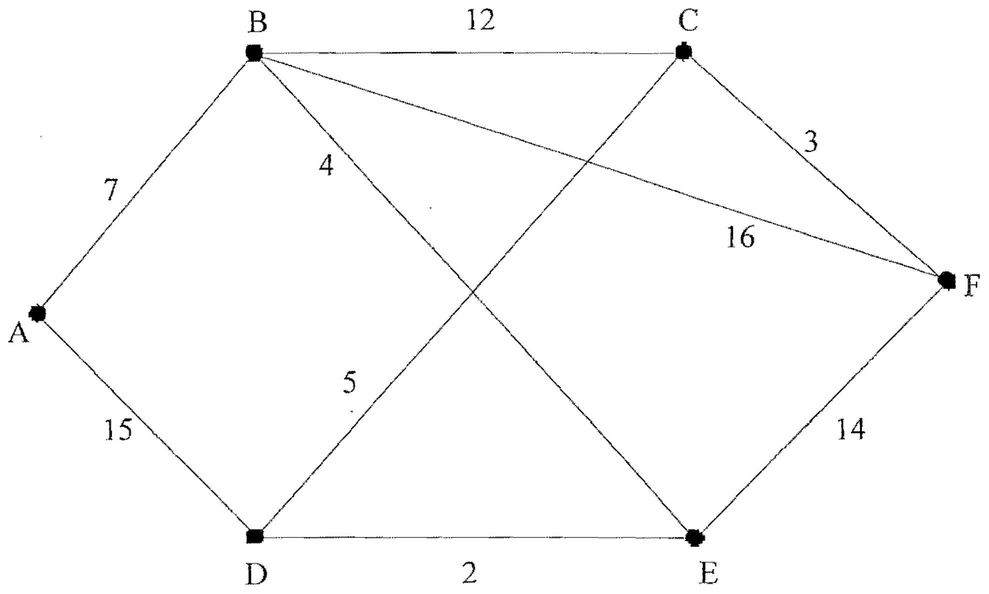
1. Julien lance le ballon quatre fois de suite. Les quatre lancers sont indépendants les uns des autres.
   a. Montrer que la probabilité que Julien ne marque aucun panier est égale à 0,0256.
   b. Calculer la probabilité que Julien marque au moins un panier.

2. Combien de fois Julien doit-il lancer le ballon au minimum pour que la probabilité qu'il marque au moins un panier soit supérieure à 0,999 ?
   Toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

Exercice 2 (*5 points*)

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Une agence de voyages organise différentes excursions dans une région du monde et propose la visite de sites incontournables, nommés A, B, C, D, E et F.
Ces excursions sont résumées sur le graphe ci-dessous dont les sommets désignent les sites, les arêtes représentent les routes pouvant être empruntées pour relier deux sites et le poids des arêtes désigne le temps de transport (en heures) entre chaque site.



1. Justifier que ce graphe est connexe.

2. Un touriste désire aller du site A au site F en limitant au maximum les temps de transport.
   a. En utilisant un algorithme, déterminer la plus courte chaîne reliant le sommet A au sommet F.
   b. En déduire le temps de transport minimal pour aller du site A au site F.

3. Un touriste désirant apprécier un maximum de paysages souhaite suivre un parcours empruntant toutes les routes proposées une et une seule fois.
   Si ce parcours existe, le décrire sans justifier ; dans le cas contraire justifier qu'un tel parcours n'existe pas.

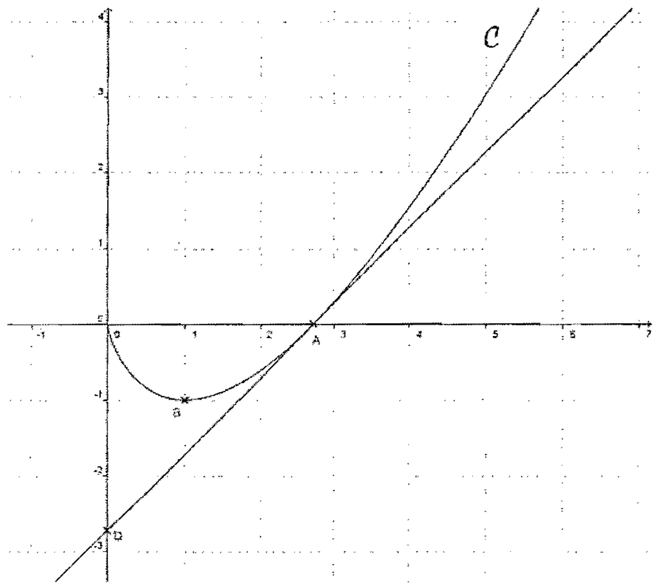
Exercice 3 (*10 points*)

Commun à tous les candidats

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Partie A. Lectures graphiques

La courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous représente, dans un repère orthonormé, une fonction f définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$.
On note f' la fonction dérivée de f.
La courbe $\mathcal{C}$ passe par les points A(e ; 0) et B(1 ; – 1).
La courbe admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse 1 et la tangente au point d'abscisse e passe par le point D(0 ; – e).



1. Déterminer une équation de la droite (AD).

Aucune justification n'est exigée pour les réponses à la question 2.

2. Par lectures graphiques :
   a. Déterminer $f(1)$ et $f'(1)$.
   b. Dresser le tableau de signes de f sur $]0\,;5]$.
   c. Dresser le tableau de signes de f' sur $]0\,;5]$.
   d. Soit F une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$. Déterminer les variations de F sur $]0\,;5]$.
   e. Encadrer par deux entiers consécutifs l'aire (en unités d'aire) du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équation $x = 4$ et $x = 5$.

Partie B. Étude de la fonction

La courbe $\mathcal{C}$ de la partie A est la représentation graphique de la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x(\ln x - 1)$.

1. *a.* Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   b. Soit h la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $h(x) = x\ln x$. On rappelle que $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = 0$. Déterminer la limite de f en 0.

2. *a.* Montrer que, pour tout x de $]0\,;+\infty[$, on a : $f'(x) = \ln x$.

   b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0\,;+\infty[$ et en déduire le tableau de variation de f sur $]0\,;+\infty[$.

3. *a.* Démontrer que la fonction H définie sur $]0\,;+\infty[$ par $H(x) = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2$ est une primitive sur $]0\,;+\infty[$ de la fonction h définie à la question 1.b).

   b. En déduire une primitive F de f et calculer $\int_1^{\mathrm{e}} f(x)dx$.

   c. En déduire l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan délimitée par $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$. On arrondira le résultat au dixième.