

Baccalauréat S – Liban – 11 juin 2009

Corrigé

Exercice 1

3 points

Bien que cela ne soit pas demandé dans l'énoncé, les affirmations sont ici démontrées.

1. On a $p(\bar{A}) = \frac{3}{5}$, donc $p(A) = \frac{2}{5}$. De plus A et B sont indépendants, donc $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

On a : $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A) \times p(B) = p(B) \times (1 - p(A)) + p(A)$

On en déduit : $p(B) = \frac{p(A \cup B) - p(A)}{1 - p(A)} = \frac{\frac{4}{5} - \frac{2}{5}}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{2}{3}$. La réponse correcte est donc **b.**

2. On a $p(X > 5) = 1 - p(X \leq 5) = 1 - \int_0^5 0,04e^{-0,04x} dx = 1 - [-e^{-0,04x}]_0^5 = 1 - (-e^{-0,04 \times 5} - e^0) = e^{-0,2} \approx 0,82$.

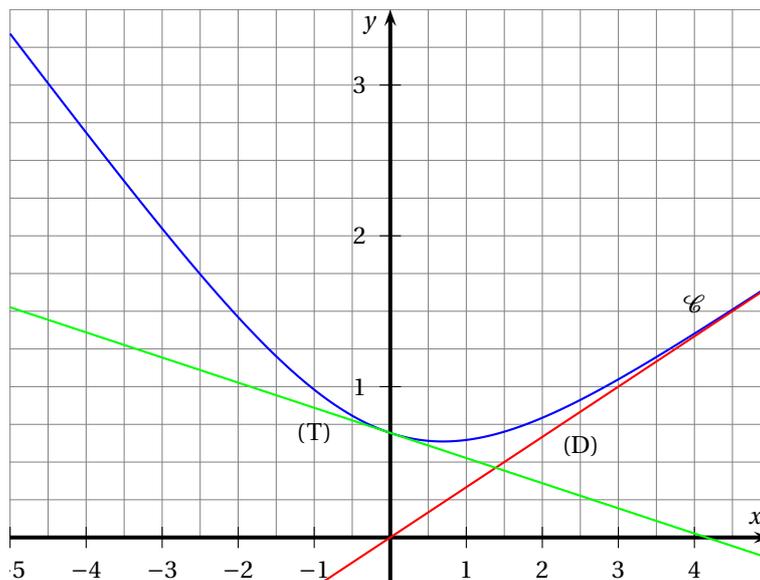
La bonne réponse est donc la proposition **d.**

3. Soit C l'événement : « je sors mon chien » et P l'événement « il pleut ». P et \bar{P} forment une partition de l'univers, donc j'utilise la formule des probabilités totales : $p(C) = p_P(C) \times p(P) + p_{\bar{P}}(C) \times p(\bar{P}) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{4} + \frac{9}{10} \times \frac{3}{4} = \frac{28}{40} = \frac{7}{10}$

On en déduit $p_C(\bar{P}) = \frac{p(\bar{P} \cap C)}{p(C)} = \frac{p_{\bar{P}}(C) \times p(\bar{P})}{p(C)} = \frac{\frac{9}{10} \times \frac{3}{4}}{\frac{7}{10}} = \frac{27}{28}$. La bonne réponse est donc **d.**

Exercice 2

8 points



Partie A

1. a. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + e^{-x} = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-x}) = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

b. Comme $f(x) - \frac{1}{3}x = \ln(1 + e^{-x})$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-x}) = 0$, on en déduit que la droite (D) est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

c. Comme $f(x) - \frac{1}{3}x = \ln(1 + e^{-x})$ et que $\forall x \in \mathbb{R}, \{-x\} > 0$, on a $1 + e^{-x} > 1$ et donc $\ln(1 + e^{-x}) > 0$, dont on déduit que l'asymptote (D) est en dessous de la courbe (C) sur \mathbb{R} .

d. Soit x un réel. On a $f(x) = \ln(1 + e^{-x}) + \frac{1}{3}x = \ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right) + \frac{1}{3}x = \ln\left(\frac{e^x + 1}{e^x}\right) + \frac{1}{3}x = \ln(e^x + 1) - \ln(e^x) + \frac{1}{3}x = \ln(e^x + 1) - x + \frac{1}{3}x$
soit $f(x) = \ln(e^x + 1) - \frac{2}{3}x$

e. On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + 1 = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(e^x + 1) = +\infty$ et comme par ailleurs, $\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{2}{3}x = +\infty$, on en déduit $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

2. a. f est dérivable en tant que composée d'une fonction $x \mapsto e^x + 1$, définie et dérivable sur \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R}^+ , où la fonction \ln est dérivable : cette composée est donc dérivable sur \mathbb{R} , la fonction linéaire que l'on y ajoute pour obtenir $f(x)$ étant elle-même dérivable sur \mathbb{R} , la fonction f est bien dérivable sur \mathbb{R} .
Sa dérivée est : $f'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} - \frac{2}{3} = \frac{3e^x}{3(e^x + 1)} - \frac{2(e^x + 1)}{3(e^x + 1)} = \frac{3e^x - 2(e^x + 1)}{3(e^x + 1)} = \frac{e^x - 2}{3(e^x + 1)}$.
- b. Le dénominateur de f' est strictement positif, donc f' est du signe de son numérateur, et $e^x - 2 > 0 \iff x > \ln(2)$. On en déduit donc que la fonction f est strictement décroissante sur $] -\infty; \ln(2)$ puis strictement croissante sur $[\ln(2); +\infty[$.

Partie B

1. On a démontré dans la **partie A** que $f(x) - \frac{1}{3} = \ln(1 + e^{-x}) > 0$ pour tout x réel, donc l'aire entre (\mathcal{C}) et (D) et les droites d'équation $x = 0$ et $x = n$, pour n entier naturel non nul, est $d_n = \int_0^n \ln(1 + e^{-x}) dx$.

2. Si on a x , $\ln(1 + e^{-x}) \leq e^{-x}$, alors $d_n = \int_0^n \ln(1 + e^{-x}) dx \leq \int_0^n e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^n = 1 - e^{-n}$

Comme pour tout n on a $e^{-n} \geq 0$, on a bien, pour tout n naturel $d_n \leq 1$

La suite $(d_n)_{n \geq 1}$ est donc majorée. De plus :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, d_{n+1} - d_n &= \int_0^{n+1} \ln(1 + e^{-x}) dx - \int_0^n \ln(1 + e^{-x}) dx \\ &= \int_n^{n+1} \ln(1 + e^{-x}) dx \end{aligned}$$

et l'intégrale entre n et $n + 1$ d'une fonction positive (comme établi à la partie A) étant positive, on a pour tout n non nul $d_{n+1} - d_n \geq 0$ donc $d_{n+1} \geq d_n$ et donc la suite est croissante.

Une suite croissante et majorée étant nécessairement convergente, on en déduit que c'est le cas de $(d_n)_{n \geq 1}$.

Partie C

1. Le coefficient directeur de (T) est donné par $f'(0)$. C'est donc $f'(0) = \frac{e^0 - 2}{3(e^0 + 1)} = \frac{-1}{6}$.

2. Soit x un réel non nul, considérons M et N les deux points de la courbe (\mathcal{C}) d'abscisses respectives x et $-x$.

L'ordonnée de M est donc $y_M = f(x) = \ln(e^x + 1) - \frac{2}{3}x$.

Pour calculer celle de N , on va utiliser l'autre forme de f : $y_N = f(-x) = \ln(1 + e^{-(-x)}) + \frac{1}{3}(-x) = \ln(e^x + 1) - \frac{1}{3}x$.

Le coefficient directeur de (MN) est donc : $\frac{y_M - y_N}{x_M - x_N} = \frac{\left[\ln(e^x + 1) - \frac{2}{3}x\right] - \left[\ln(e^x + 1) - \frac{1}{3}x\right]}{x - (-x)} = \frac{-\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x}{2x} = \frac{-\frac{1}{3}x}{2x} = -\frac{1}{6}$

Les droites (MN) et (T) ayant le même coefficient directeur, elles sont donc parallèles.

Exercice 3

4 points

1. a. Le point I a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right)$, car $\vec{AI} = \vec{AE} + \vec{EI} = \vec{AE} + \frac{1}{2}\vec{EF} = \vec{AE} + \frac{1}{2}\vec{AB}$
Le point J a pour coordonnées $(2; 0; 1)$

- b. On a les coordonnées suivantes : $\vec{DJ} : (2; -1; 1)$; $\vec{BG} : (0; 1; 1)$ et $\vec{BI} : \left(\frac{1}{2}; 0; 1\right)$.

Les vecteurs \vec{BG} et \vec{BI} sont clairement non colinéaires.

On a finalement $\vec{DJ} \cdot \vec{BG} = 0 - 1 + 1 = 0$ et $\vec{DJ} \cdot \vec{BI} = 2 \times \frac{-1}{2} + 0 + 1 = 0$

Le vecteur \vec{DJ} est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BGI), donc il est normal au plan.

- c. On en déduit que le plan (BGI) a une équation cartésienne de la forme : $2x - y + z + d = 0$, $d \in \mathbb{R}$. d étant tel que l'équation du plan est vérifiée par les coordonnées de B (car B est un point du plan).

Donc $2 \times 1 - 0 + 0 + d = 0$ soit $d = -2$, l'équation du plan est donc $2x - y + z - 2 = 0$.

- d. On applique la formule du cours : la distance d est $d = \frac{|2 \times 1 - 0 + 1 - 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

2. a. La droite (Δ) est dirigée par \vec{DJ} , de coordonnées $(2; -1; 1)$ et passant par F de coordonnées $(1; 0; 1)$, elle admet donc pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 1 + t \end{cases} t \in \mathbb{R}$.

- b. Le plan de la face ADHE est le plan d'équation $x = 0$, et le point de (Δ) d'abscisse 0 est le point de paramètre $-\frac{1}{2}$, ce point a pour coordonnées $\left(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, c'est bien le centre de la face ADHE, car c'est le milieu du segment $[AH]$ H étant le point de coordonnées $(0; 1; 1)$ et A l'origine du repère. L'intersection de (Δ) et de la face ADHE est bien le centre de celle-ci, le point K .

c. Le point L, de coordonnées $\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{6}; \frac{5}{6}\right)$ est le point de (Δ) de paramètre $-\frac{5}{6}$.

De plus, on a $2 \times \frac{2}{3} - \frac{1}{6} + \frac{5}{6} - 2 = \frac{4}{3} + \frac{4}{6} - 2 = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} - 2 = \frac{6}{3} - 2 = 0$ les coordonnées de L sont donc solutions de l'équation de (BGI) le point L est aussi sur (BIG), c'est donc bien l'intersection de la droite et du plan.

d. On a \vec{LB} de coordonnées $\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{6}; -\frac{5}{6}\right)$ et \vec{GI} de coordonnées $\left(-\frac{1}{2}; -1; 0\right)$

Donc $\vec{LB} \cdot \vec{GI} = \frac{1}{3} \times \frac{-1}{2} + \frac{-1}{6} \times (-1) + \frac{-5}{6} \times 0 = \frac{-1}{6} + \frac{1}{6} = 0$: les vecteurs sont orthogonaux, donc (BL) et (GI) sont perpendiculaires (orthogonales et coplanaires) donc (BL) est la hauteur issue de B dans BIG.

\vec{BG} a pour coordonnées $(0; 1; 1)$ et \vec{IL} a pour coordonnées $\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{6}; -\frac{1}{6}\right)$.

Donc $\vec{IL} \cdot \vec{BG} = \frac{1}{6} \times 0 + \frac{1}{6} \times 1 + \frac{-1}{6} \times 1 = \frac{-1}{6} + \frac{1}{6} = 0$ là encore les vecteurs sont orthogonaux, donc (IL) et (BI) sont perpendiculaires (orthogonales et coplanaires) donc (IL) est la hauteur issue de I dans BIG.

L est donc l'intersection de deux des hauteurs du triangle BIG, c'est bien l'orthocentre de BGI.

Exercice 4

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

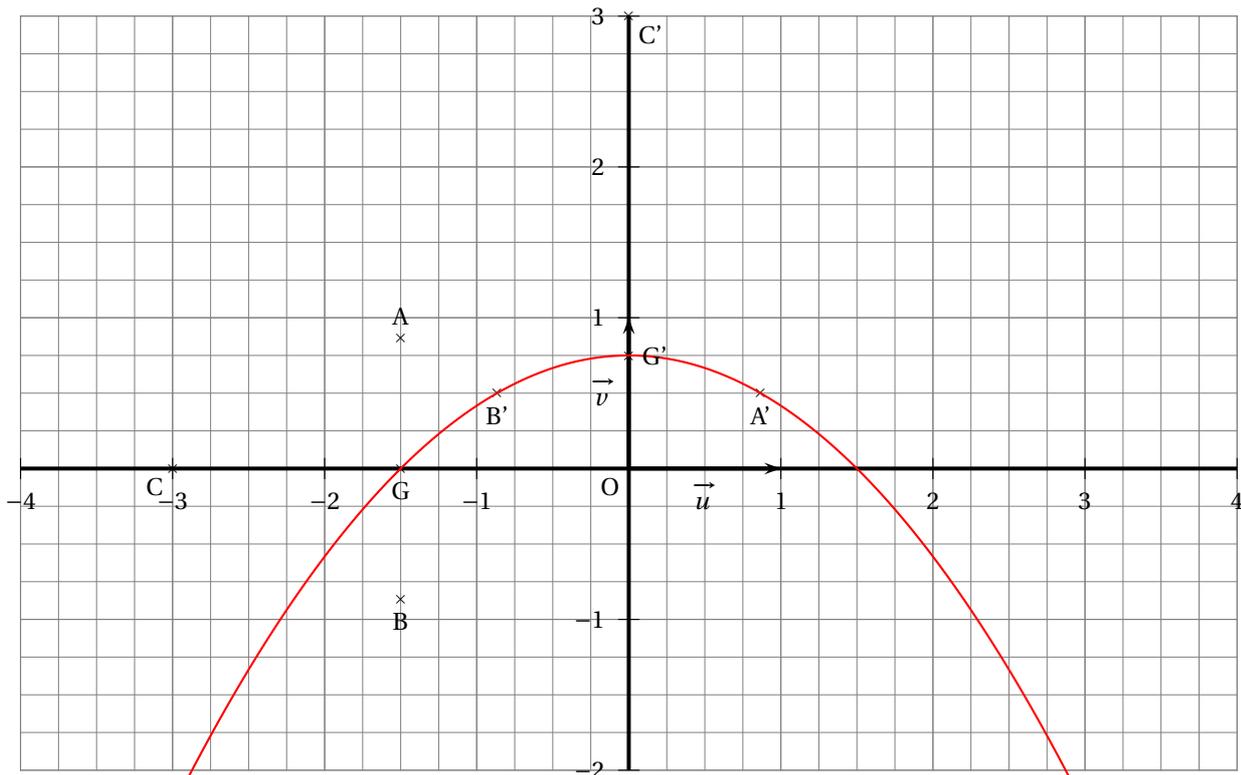
Partie A

$$1. z_A = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \times \left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} \left[-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] = \sqrt{3} \left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right] = \sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$\text{On a donc } z_B = \sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}} = \sqrt{3}e^{-i\frac{5\pi}{6}}$$

$$\text{Enfin, } z_C = 3e^{i\pi}$$

2. Voici la figure :



$$3. \text{ Posons } Z = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \frac{-3 - \left(\frac{-3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(\frac{-3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{-3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{i\sqrt{3}} = \frac{i\sqrt{3} \times \left(i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)}{i\sqrt{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

On a $|Z| = \left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right| = 1$ et $|Z| = \frac{BC}{BA}$, donc $BA = BC$: le triangle est isocèle en B.

De plus $\arg(Z) \equiv \arg\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right) \equiv \frac{\pi}{3} (2\pi)$, donc l'angle $(\vec{BC}; \vec{BA}) \equiv \frac{\pi}{3} (2\pi)$: le triangle BAC, isocèle en B a $\frac{\pi}{3}$ pour angle principal : le triangle est donc équilatéral.

Partie B

1. a. On a $\frac{1}{3}i = \frac{1}{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$, donc :

$$z_{A'} = \frac{1}{3}e^{i\frac{\pi}{2}} \times z_A^2 = \frac{1}{3}e^{i\frac{\pi}{2}} \times \left(\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^2 = \frac{1}{3}e^{i\frac{\pi}{2}} \times 3e^{i\frac{5\pi}{3}} = e^{i\frac{13\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$z_{B'} = \frac{1}{3}e^{i\frac{\pi}{2}} \times z_B^2 = \frac{1}{3}e^{i\frac{\pi}{2}} \times \left(\sqrt{3}e^{i\frac{-5\pi}{6}}\right)^2 = \frac{1}{3}e^{i\frac{\pi}{2}} \times 3e^{i\frac{-5\pi}{3}} = e^{i\frac{-7\pi}{6}} = e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$z_{C'} = \frac{1}{3}e^{i\frac{\pi}{2}} \times z_C^2 = \frac{1}{3}e^{i\frac{\pi}{2}} \times (-3)^2 = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$$

b. Voir la figure.

c. A et B' ont le même argument, donc O, A et B' sont alignés (O est à l'extérieur du segment [AB']).

B et A' ont des arguments dont la différence est π , donc les points O, B et A' sont alignés (O étant cette fois un point du segment [A'B])

d.
$$z_G = \frac{0 + z_A + z_B + z_C}{4} = \frac{-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - 3}{4} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}.$$

Et donc :
$$z_{G'} = \frac{1}{3}i \times z_G^2 = \frac{1}{3} \times \frac{9}{4}i = \frac{3}{4}i$$

Le point G' n'est pas l'isobarycentre des points O' A', B' et C', car O' = O et
$$\frac{0 + z_{A'} + z_{B'} + z_{C'}}{4} = \frac{e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{i\frac{5\pi}{6}} + 3i}{4} = \frac{4i}{4} = i \neq z_{G'}$$

2. Si M appartient à la droite (AB) alors son affixe z est de la forme $z = -\frac{3}{2} + ix, x \in \mathbb{R}$ et donc son image M' aura pour affixe

$$z' = \frac{1}{3}i \times \left(-\frac{3}{2} + ix\right)^2 = \frac{1}{3}i \times \left(\frac{9}{4} - 3ix - x^2\right) = x + i \times \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}x^2\right)$$

On a donc $\Re(z') = x$ et $\Im(z') = \frac{3}{4} - \frac{1}{3}x^2$, donc M' est bien sur la parabole d'équation $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{4}$.