

CORRIGE

Ces éléments de correction n'ont qu'une valeur indicative. Ils ne peuvent en aucun cas engager la responsabilité des autorités académiques, chaque jury est souverain.

**ÉLÉMENTS DE CORRECTION
ET BARÈME INDICATIF PROPOSÉS**

N.B. : Il est rappelé que ce document est à l'usage exclusif des jurys. Les règles de confidentialité habituelles concernant les travaux des jurys, des commissions d'entente et des permanences téléphoniques s'appliquent à son contenu. Une analyse par compétences est proposée pour guider les correcteurs après l'exercice 4

**Exercice 1 (7 points)
Commun à tous les candidats**

Partie A

- 0,5 1. a. L'indication donnée par l'énoncé renvoie au résultat connu $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, qui doit être évoqué. Finalement : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
- 1 b. La fonction f est dérivable sur $[0, +\infty[$ comme produit de fonctions dérivables et on a, pour tout réel positif x , $f'(x) = (1 - 2x^2)e^{-x^2}$. Le signe de la fonction dérivée est donc celui de $x \mapsto 1 - 2x^2$. La fonction f est croissante sur $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[$. Elle atteint son maximum en $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Ce maximum vaut $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}e}$.
- 0,5 2. Par définition, la fonction f étant positive sur $[0, a]$, cette aire $F(a)$ est l'intégrale de f :
$$F(a) = \int_0^a f(x) dx.$$
- 1 En effectuant l'intégration : $F(a) = -\frac{1}{2} \left[e^{-x^2} \right]_0^a = \frac{1 - e^{-a^2}}{2}$.
- 0,5 D'après les résultats sur l'exponentielle : $\lim_{a \rightarrow +\infty} F(a) = \frac{1}{2}$.

Partie B

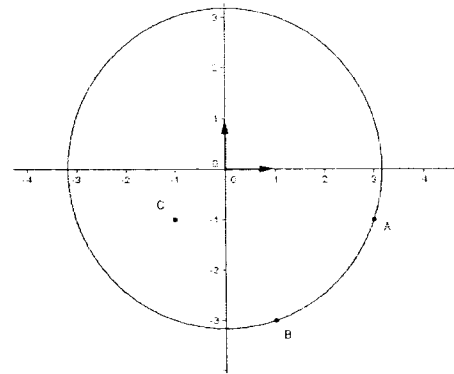
- 0,75 1. a. La fonction f est décroissante sur $[1, +\infty[$. Sur l'intervalle $[n, n+1]$, $f(x)$ est majoré par $f(n)$ et minoré par $f(n+1)$ et l'intégrale conserve l'ordre, d'où le résultat.
- 0,5 b. D'après la question précédente, pour tout entier naturel n ,
$$u_{n+1} \leq f(n+1) \leq u_n \leq f(n),$$
qui prouve que la suite (u_n) est décroissante.
- 0,75 c. La suite (u_n) est positive et majorée par la suite $(f(n))$ qui converge vers 0 (car la fonction f a pour limite 0 en $+\infty$). Donc elle converge vers 0.
- 0,5 2. a. Résultat obtenu par additivité de l'intégrale.
- 1 b. La calculatrice indique que e^{-25} est de l'ordre de 10^{-11} . Le nombre $\frac{e^{-25}}{2}$ n'est donc pas pris en compte par le tableur. Ce dernier interprète donc la suite $(F(n))$ comme constante à partir d'un certain rang (ce qui n'est pas, bien entendu).

*Voir
l'analyse
par
compétences
en dernière
page*

Exercice 2 (5 points)
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Figure 0,5
 0,75

1. a. Voir figure.
 b. Le triangle ABC est rectangle isocèle de sommet principal B (les calculs doivent être faits).



0,5 c. Les points A et B sont à la même distance $\sqrt{10}$ du point O.

0,5 2. a. La rotation r associée au point d'affixe z au point d'affixe z' définie par : $z' - m = i(z - m)$.

0,5 b. L'affixe n du point N est donc donnée par : $n - m = i(a - m)$.

On a donc :

$$n = (1 - i)m + 1 + 3i.$$

0,5 3. $q = \frac{n + a}{2}$, ce qui donne le résultat avancé par l'énoncé.

0,5 4. a. Le point M appartient au cercle de centre O et de rayon $\sqrt{10}$, on prend pour θ un argument de m .

0,75+0,5 b. Dans ce cas, on a : $|q - 2 - i| = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{10} = \sqrt{5}$.

Appelons D le point d'affixe $2 + i$. Le point Q appartient au cercle de centre D et de rayon $\sqrt{5}$. Réciproquement, si on se donne un point R de ce cercle, le point M défini par

$$q = \frac{(1 - i)m}{2} + 2 + i \text{ appartient au cercle de centre O de rayon } \sqrt{10}.$$

Voir l'analyse par compétences en dernière page

Exercice 2 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

0,5 1. C'est un résultat de cours, les points O et A étant distincts et les points A et B distincts.

0,5 2. Par identification, on trouve que cette similitude a pour écriture complexe : $z' = (1 - i)z + i$.

0,5 On peut encore écrire : $z' - 1 = (1 - i)(z - 1)$, qui montre que cette similitude a pour centre le point Ω d'affixe 1, pour rapport $\sqrt{2}$ et que $-\frac{\pi}{4}$ est une mesure de son angle.

0,5 3. a. Ce résultat s'établit par récurrence.

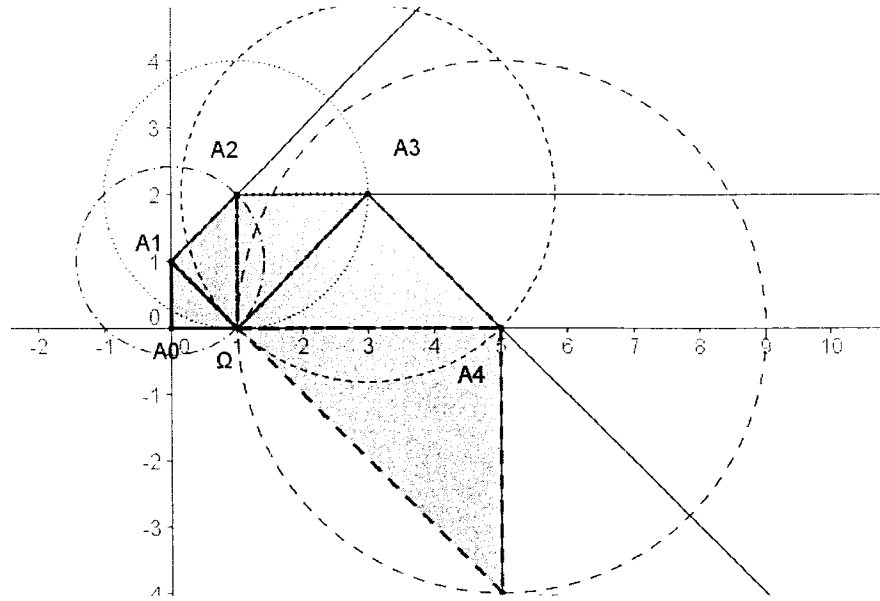
1 b. Le vecteur $\overrightarrow{\Omega A_n}$ a pour affixe $(1 - i)^n$ et le vecteur $\overrightarrow{A_n A_{n+1}}$ a pour affixe $-i(1 - i)^n$. Ces vecteurs ont pour norme $(\sqrt{2})^n$ et leur angle a pour mesure $\frac{\pi}{2}$.

1 avec figure c. Le point A_{n+1} est le troisième sommet du triangle rectangle isocèle indirect de sommet principal A_n et de deuxième sommet Ω .

1 4. Le point A_n est un point de la droite (ΩB) si et seulement si l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\Omega A_n}$ est un imaginaire pur. Or, $(1 - i)^2$ en est un. Par récurrence, on montre que $(1 - i)^n$ est un imaginaire

Voir
 l'analyse
 par
 compétences
 en dernière
 page

pur si et seulement si il existe un entier naturel k tel que $n = 2 + 4k$.



Exercice 3 (4 points)

Commun à tous les candidats

1 par
 justification.
 Voir
 l'analyse
 par
 compétences
 en dernière
 page

Proposition 1 : FAUX. Cet ensemble est un plan.

Proposition 2 : FAUX. La relation $\overline{MM'} = 4\overline{MG}$, qui s'écrit aussi $\overline{GM'} = 3\overline{MG}$, caractérise l'homothétie de centre G et de rapport -3 .

Proposition 3 : FAUX. Le vecteur \overline{AD} n'est pas une combinaison linéaire des vecteurs \overline{AB} et \overline{AC} .

Proposition 4 : VRAI. La distance du point Ω au plan est 5.

Exercice 4 (4 points)

Commun à tous les candidats

0,5

1. a. Il s'agit de la loi binomiale de paramètres 3 et $\frac{1}{6}$.

0,25

b. Son espérance est $3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

0,25

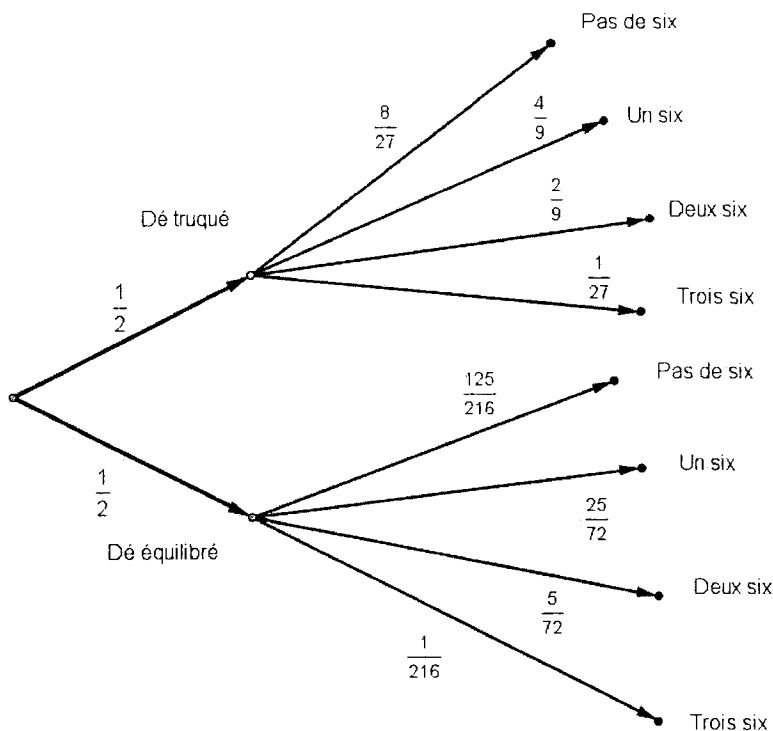
c. $P(X = 2) = 3 \times \frac{5}{6} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{5}{72}$.

2. On réalise l'arbre ci-dessous.

1 pour
 l'arbre et les
 réponses,
 0,5 pour les
 réponses

« Choisir le dé bien équilibré et obtenir exactement deux six » est un événement de probabilité $\frac{5}{144}$. « Choisir le dé truqué et obtenir exactement deux six » est un événement de probabilité $\frac{1}{9}$

argumentées
 sans arbre.



0,25

b. La probabilité de A s'obtient en faisant la somme des probabilités de ces événements

incompatibles : $P(A) = \frac{5}{144} + \frac{1}{9} = \frac{7}{48}$

0,75

c. La probabilité conditionnelle $P_A(\bar{D})$ s'exprime ainsi : $P_A(\bar{D}) = \frac{P(\bar{D} \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{7}{48}} = \frac{16}{21}$

0,25

3. La probabilité d'obtenir un six dans l'expérience aléatoire décrite (choix d'un dé et lancer) est

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{4}$$

0,5

a. On détermine la probabilité de l'événement contraire, « n'obtenir aucun six » :

$$P(\bar{B}_n) = \left(\frac{3}{4}\right)^n. \text{ Donc } p_n = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

0,25

b. Cette suite a pour limite 1. On peut rapprocher ce résultat des formulations diverses de la loi des grands nombres.

*Voir
 l'analyse
 par
 compétences
 en dernière
 page*

Prise en compte des compétences manifestées par les candidats

Rappelons que les correcteurs doivent s’efforcer de prendre en compte les compétences manifestées par les candidats dans les domaines suivants :

1. Restituer et mobiliser des connaissances
2. Appliquer une méthode
3. Prendre des initiatives, choisir un modèle, émettre une conjecture, expérimenter
4. Raisonner, démontrer, élaborer une démarche
5. Évaluer, critiquer un résultat, vérifier la validité d’un résultat ou d’une méthode
6. Rechercher et organiser de l’information utile
7. Maîtriser la lecture et le traitement de l’information
8. Développer une démarche, mettre en forme un raisonnement

Dans ce qui suit, chaque exercice a été analysé selon ces huit domaines. Dès lors qu’une des compétences 1 et 2 d’une part, 3, 4 et 5 d’autre part aura été identifiée par le correcteur, celui-ci n’hésitera pas à attribuer un nombre substantiel de points même si le calcul contient une erreur ou même si la démarche n’a pas abouti. Une question peut naturellement faire appel à des compétences diverses, ce dont les tableaux ci-dessous ne rendent pas nécessairement compte.

Exercice 1

Restituer et mobiliser des connaissances	A 1 et 2	Évaluer, critiquer un résultat, vérifier la validité d’un résultat ou d’une méthode	B 2 <i>b</i>
Appliquer une méthode	A 2	Rechercher et organiser de l’information utile	A 1 <i>b</i>
Prendre des initiatives, choisir un modèle, émettre une conjecture, expérimenter	B 2 <i>b</i>	Maîtriser la lecture et le traitement de l’information	A 1
Raisonner, démontrer, élaborer une démarche	B 1	Développer une démarche, mettre en forme un raisonnement	B 1 <i>c</i>

Exercice 2 (obligatoire)

Restituer et mobiliser des connaissances	1 <i>a</i> 2 <i>a</i> 4 <i>a</i>	Évaluer, critiquer un résultat, vérifier la validité d’un résultat ou d’une méthode	
Appliquer une méthode	1 <i>c</i>	Rechercher et organiser de l’information utile	
Prendre des initiatives, choisir un modèle, émettre une conjecture, expérimenter		Maîtriser la lecture et le traitement de l’information	
Raisonner, démontrer, élaborer une démarche	4 <i>b</i>	Développer une démarche, mettre en forme un raisonnement	

Exercice 2 (spécialité)

Restituer et mobiliser des connaissances	1 2	Évaluer, critiquer un résultat, vérifier la validité d'un résultat ou d'une méthode	
Appliquer une méthode	2	Rechercher et organiser de l'information utile	
Prendre des initiatives, choisir un modèle, émettre une conjecture, expérimenter		Maîtriser la lecture et le traitement de l'information	
Raisonner, démontrer, élaborer une démarche	3	Développer une démarche, mettre en forme un raisonnement	3 c 4

Exercice 3

Restituer et mobiliser des connaissances	Toutes	Évaluer, critiquer un résultat, vérifier la validité d'un résultat ou d'une méthode	Toutes
Appliquer une méthode	2, 3	Rechercher et organiser de l'information utile	
Prendre des initiatives, choisir un modèle, émettre une conjecture, expérimenter		Maîtriser la lecture et le traitement de l'information	
Raisonner, démontrer, élaborer une démarche		Développer une démarche, mettre en forme un raisonnement	

Exercice 4

Restituer et mobiliser des connaissances	1	Évaluer, critiquer un résultat, vérifier la validité d'un résultat ou d'une méthode	
Appliquer une méthode	2, 3	Rechercher et organiser de l'information utile	
Prendre des initiatives, choisir un modèle, émettre une conjecture, expérimenter		Maîtriser la lecture et le traitement de l'information	
Raisonner, démontrer, élaborer une démarche	3	Développer une démarche, mettre en forme un raisonnement	2, 3