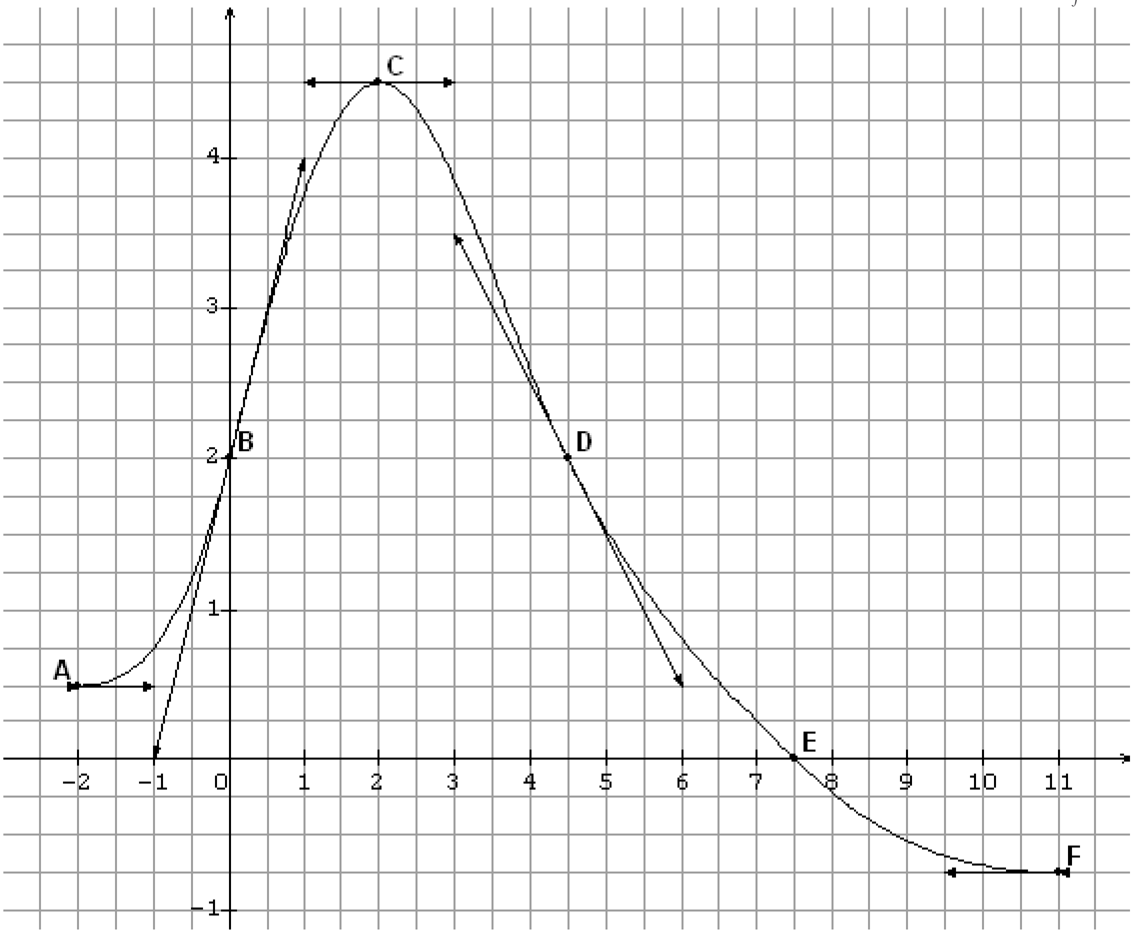
# Correction Bac ES – Amérique du Nord – juin 2010

## EXERCICE 1 (5 points)

On considère la fonction $f$ définie et dérivable sur l'intervalle $[-2 ; 11]$, et on donne sa courbe $\mathscr{C}_f$ ci-dessous.




1) $f'(0)$ est égal à 2 : **réponse B**
   En effet, la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 a pour coefficient directeur 2.

2) $f'(x)$ est strictement positif sur l'intervalle $]-2 ; 2[$ : **réponse C**.
   En effet, la fonction $f$ étant strictement croissante sur $]-2 ; 2[$, sa fonction dérivée $f'$ sera strictement positive sur $]-2 ; 2[$.

3) Une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point D est $y = -x + 6{,}5$ : **réponse A**.
   En effet, la tangente à la courbe au point D a pour coefficient directeur $-1$.

4) Une primitive $F$ de la fonction $f$ sur $[-2 ; 11]$, est strictement croissante sur $[-2 ; 7{,}5]$ : **réponse B**.
   En effet, la fonction $f$ est la dérivée de la fonction $F$ et sur $[-2 ; 7{,}5]$, la fonction $f$ est strictement positive sauf en 7,5 où elle s'annule.
   Donc, la fonction $F$ est strictement croissante sur $[-2 ; 7{,}5]$.

5) Sur l'intervalle $[-2 ; 11]$, l'équation $\exp(f(x)) = 1$ admet une solution : **réponse A**.
   En effet, $\exp(f(x)) = 1 \Leftrightarrow f(x) = 0$ et d'après le graphique, l'équation $f(x) = 0$ admet pour unique solution $x = 7{,}5$.

**EXERCICE 2** (5 points)

Un commerçant spécialisé en photographie numérique propose en promotion un modèle d'appareil photo numérique et un modèle de carte mémoire compatible avec cet appareil.

Il a constaté, lors d'une précédente promotion, que :

- 20 % des clients achètent l'appareil photo en promotion.
- 70 % des clients qui achètent l'appareil photo en promotion achètent la carte mémoire en promotion.
- 60 % des clients n'achètent ni l'appareil photo en promotion, ni la carte mémoire en promotion.

On suppose qu'un client achète au plus un appareil photo en promotion et au plus une carte mémoire en promotion.

**1) a)** Comme 20 % des clients achètent l'appareil photo en promotion, on a : $p(A) = 0{,}2$.

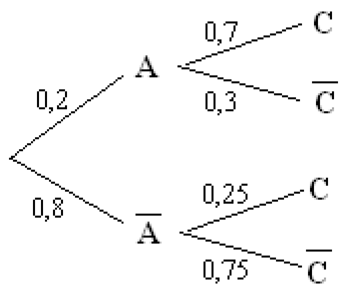
Or, $p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - 0{,}2$ et donc, $p(\overline{A}) = 0{,}8$.

On sait que 60 % des clients n'achètent ni l'appareil photo en promotion, ni la carte mémoire en promotion donc, $p(\overline{A} \cap \overline{C}) = 0{,}6$.

**b)** On a : $p_{\overline{A}}(\overline{C}) = \dfrac{p(\overline{A} \cap \overline{C})}{p(\overline{A})} = \dfrac{0{,}6}{0{,}8} = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$.

Donc, sachant qu'un client n'achète pas l'appareil photo en promotion, la probabilité qu'il n'achète pas non plus la carte mémoire en promotion est égale à 0,75.

**2)** On peut traduire la situation avec l'arbre pondéré suivant :




**3)** Comme les événements A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales, $p(C) = p(A \cap C) + p(\overline{A} \cap C)$.

Ainsi, $p(C) = 0{,}2 \times 0{,}7 + 0{,}8 \times 0{,}25$ soit, $\mathbf{p(C) = 0{,}34}$.

Donc, la probabilité qu'un client achète la carte mémoire en promotion est 0,34.

**4)** $p_C(A) = \dfrac{p(A \cap C)}{p(C)} = \dfrac{0{,}2 \times 0{,}7}{0{,}34} = \dfrac{7}{17}$

Donc, sachant qu'un client achète la carte mémoire en promotion, la probabilité qu'il achète aussi l'appareil photo en promotion est égale à $\dfrac{7}{17}$.

**5)** Le commerçant fait un bénéfice de 30 € sur chaque appareil photo en promotion et un bénéfice de 4 € sur chaque carte mémoire en promotion.

**a)**

| Bénéfice par client en euros | 0 | 4 | 30 | 34 |
|---|---|---|---|---|
| Probabilité d'atteindre le bénéfice | $p(\overline{A} \cap \overline{C})$<br>0,6 | $p(\overline{A} \cap C)$<br>0,2 | $p(A \cap \overline{C})$<br>0,06 | $p(A \cap C)$<br>0,14 |

**b)** L'espérance de cette loi est : $E = 0 \times 0{,}6 + 4 \times 0{,}2 + 30 \times 0{,}06 + 34 \times 0{,}14 = 7{,}36$.

Et, $E \times 100 = 736$.

Donc, pour 100 clients entrant dans son magasin, le commerçant peut espérer un bénéfice de 736 €.

**6)** On est dans un schéma de Bernoulli à trois épreuves.

Par ailleurs, l'événement « au moins un des trois clients n'achète pas l'appareil photo en promotion » a pour contraire l'événement « tous les clients achètent l'appareil photo en promotion ».

Donc, la probabilité cherchée est : $1 - p(A)^3 = 1 - 0{,}2^3 = 0{,}992$.

## EXERCICE 3 (5 points)

**Commun à tous les candidats**

### Partie A – Étude préliminaire

On considère la fonction $g$ définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = 1 - 2\ln(x)$.

**1)** Le réel $\alpha$ est solution de l'équation $g(x) = 0$.

Or, $g(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \exp(\frac{1}{2}) = \sqrt{e}$.

Ainsi, $\alpha = \sqrt{e}$.

**2)** La fonction $g$ est strictement décroissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et elle s'annule en $\alpha$ donc : $g(x) > 0$ sur $]0\,;\alpha[$ et $g(x) < 0$ sur $]\alpha\,;+\infty[$.

### Partie B – Étude d'une fonction

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2\ln(x)+1}{x}$

**1)** On a : $f(x) = 2\times\dfrac{\ln(x)}{x} + \dfrac{1}{x}$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

**2) a)** $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = 2\ln(x) + 1$ et $v(x) = x$.

Ainsi, $f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$ avec $u'(x) = 2\times\dfrac{1}{x} = \dfrac{2}{x}$ et $v'(x) = 1$.

Soit, $f'(x) = \dfrac{\frac{2}{x}\times x - (2\ln(x)+1)\times 1}{x^2} = \dfrac{1-2\ln(x)}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

**b)** Comme $x^2 > 0$ pour tout $x \in\ ]0\,;+\infty[$, $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$.
Donc d'après la question A2, on a le tableau de variations suivant :

| $x$ | $0$ | | $\sqrt{e}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| signe de $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $2/\sqrt{e}$ | $\searrow$ | $0$ |

$f(\sqrt{e}) = \dfrac{2\ln(\sqrt{e})+1}{\sqrt{e}} = \dfrac{2}{\sqrt{e}} \approx 1{,}21$.

**3) a)** On a : $f(x) = 2\times\dfrac{1}{x}\times\ln(x) + \dfrac{1}{x} = 2\times u'(x)\times u(x) + u'(x)$ avec $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $u(x) = \ln(x)$.

Donc, $F(x) = u^2(x) + u(x)$ soit, $F(x) = \ln^2(x) + \ln(x) = \ln(x)\times(\ln(x)+1)$.

**b)** On a : $\int_1^5 f(x)\,dx = F(5) - F(1) = (\ln 5)^2 + \ln 5$ et donc, $I = \dfrac{(\ln 5)^2 + \ln 5}{4} \approx 1{,}05$.

**Partie C – Application économique**

**1)** La valeur moyenne de bénéfice $f$ sur l'intervalle [1 ; 5] est : $\dfrac{1}{5-1}\displaystyle\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{I}$.

Donc, la valeur moyenne du bénéfice unitaire pour une production hebdomadaire comprise entre 1 000 et 5 000 pièces est de 1,05 € (au centime près).

**2)** On cherche à résoudre l'équation $f(x) = 1{,}05$.

☞ Sur l'intervalle $]0 ; \sqrt{\mathrm{e}}]$, la fonction $f$ est continue et strictement croissante et à valeurs dans l'intervalle $]-\infty ; \dfrac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}]$.

De plus, $1{,}05 \in \, ]-\infty ; \dfrac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}]$.

Donc, d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 1{,}05$ admet une unique solution $x_1$ sur l'intervalle $]0 ; \sqrt{\mathrm{e}}]$.
Avec la calculatrice, on trouve : $x_1 = 1{,}056$ à $10^{-3}$ près par excès.

☞ Sur $[\sqrt{\mathrm{e}} ; +\infty[$, la fonction $f$ est continue et strictement décroissante et à valeurs dans $]0 ; \dfrac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}]$.

De plus, $1{,}05 \in \, ]0 ; \dfrac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}]$.

Donc, d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 1{,}05$ admet une unique solution $x_2$ sur l'intervalle $[\sqrt{\mathrm{e}} ; +\infty[$.
Avec la calculatrice, on trouve : $x_2 = 3{,}119$ à $10^{-3}$ près.

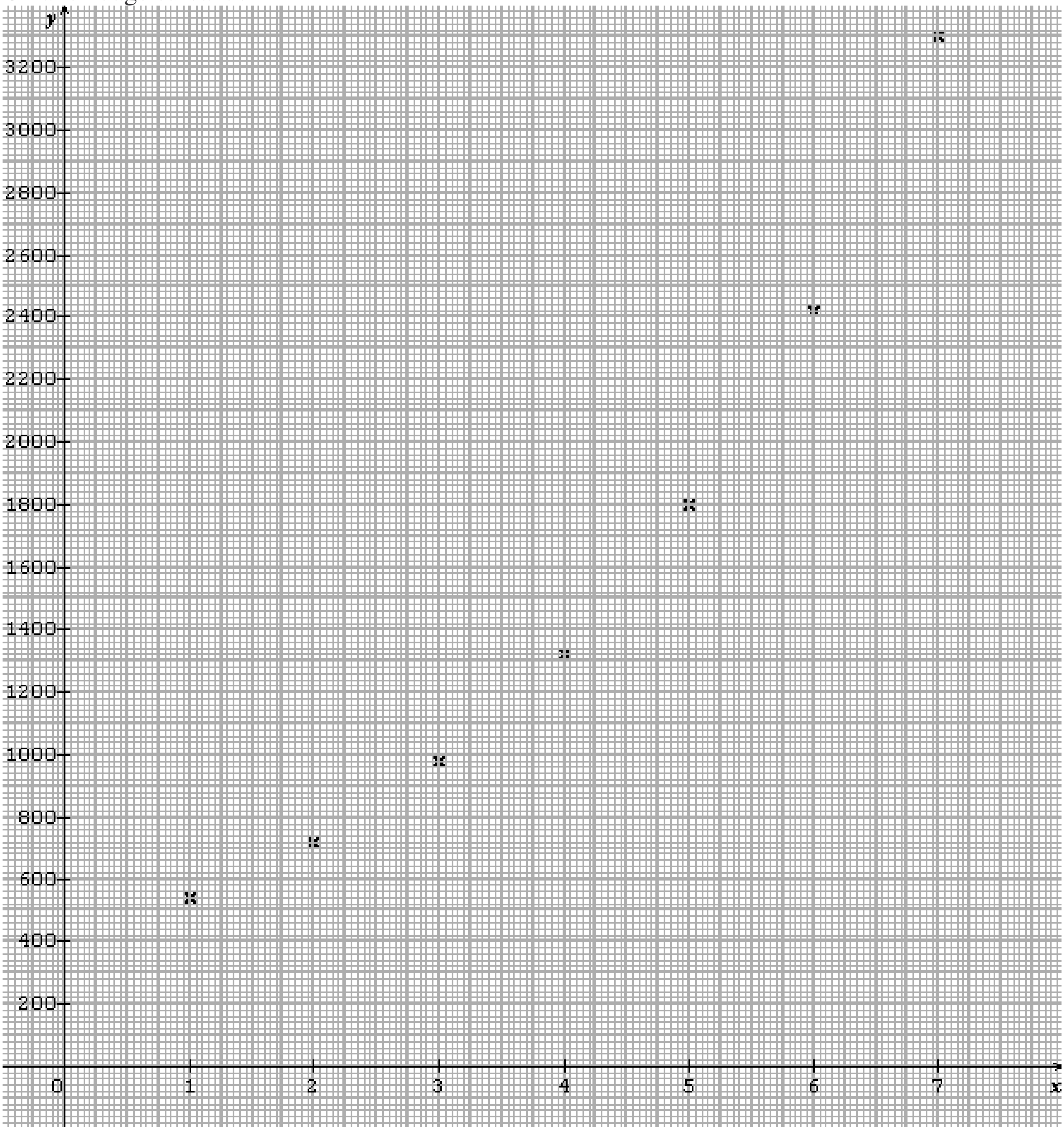
Donc, pour une production de 1 056 ou de 3 119 objets, le bénéfice unitaire sera de 1,05 €.

## **EXERCICE 4** (5 points)

***Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité***

| Rang de la semaine : $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombre de consultations : $y_i$ | 540 | 720 | 980 | 1320 | 1800 | 2420 | 3300 |

**1)** On a le nuage suivant :




Les écarts entre les ordonnées sont de plus en plus grands, donc l'accroissement n'est pas linéaire. Donc, il est normal de rejeter l'ajustement affine.

**2)** On a le tableau suivant :

| Rang de la semaine : $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z_i = \ln(y_i)$ | 6,29 | 6,58 | 6,89 | 7,19 | 7,50 | 7,79 | 8,10 |

**3)** La droite d'ajustement affine par la méthode des moindres carrés reliant $z$ et $x$ a pour équation : $z = 0{,}3x + 6$.

Comme $z = \ln(y)$ on a : $\ln(y) = 0{,}3x + 6$ soit, $y = \mathrm{e}^{0{,}3x+6}$.

**4)** **a)** Pour $x = 10$, on a : $y = e^{0,3\times10+6} = e^{9} = 8\,103{,}08$ à $10^{-2}$ près.
Donc, la $10^{\text{ème}}$ semaine, on peut estimer qu'il y aura 8 103 consultations.

**b)** On cherche $x$ tel que $e^{0,3x+6} \geqslant \frac{1}{4}\times 50\,000$ soit, $e^{0,3x+6} \geqslant 12\,500$.

Or, $e^{0,3x+6} \geqslant 12\,500 \Leftrightarrow 0{,}3x + 6 \geqslant \ln(12\,500) \Leftrightarrow 0{,}3x \geqslant \ln(12\,500) - 6 \Leftrightarrow x \geqslant \dfrac{\ln(12\,500)-6}{0{,}3}$

Comme $\dfrac{\ln(12\,500)-6}{0{,}3} \approx 11{,}44$ c'est la $12^{\text{ème}}$ semaine que le nombre de consultations dépassera le quart de la population.

**5)** Ce modèle ne peut pas rester valable sur le long terme car la $17^{\text{ème}}$ semaine, le nombre de consultations dépasserait le nombre d'habitants.

## EXERCICE 4 (5 points)

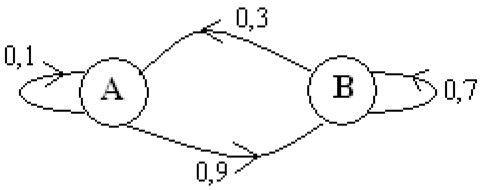
***Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité***

Pendant ses vacances d'été, Alex a la possibilité d'aller se baigner tous les jours. S'il va se baigner un jour, la probabilité qu'il aille se baigner le lendemain est de 0,7.
S'il ne va pas se baigner un jour, la probabilité qu'il aille se baigner le lendemain est de 0,9.
Le premier jour de ses vacances, Alex va se baigner.

$n$ étant un entier naturel non nul, on note :

- $a_n$ la probabilité qu'Alex n'aille pas se baigner le $n$-ième jour.
- $b_n$ la probabilité qu'Alex aille se baigner le $n$-ième jour.
- $P_n = (a_n \quad b_n)$ la matrice ligne traduisant l'état probabiliste le $n$-ième jour.
  On a donc $P_1 = (0 \quad 1)$.

**1)** **a)** On a le graphe probabiliste suivant :




**b)** La matrice de transition associée à ce graphe est : $M = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$.

**2)** $P_3 = P_1 \times M^2 = (0,24 \quad 0,76)$ ; $P_{10} = P_1 \times M^9 = (0,25 \quad 0,75)$ et $P_{20} = P_1 \times M^{19} = (0,25 \quad 0,75)$.
On peut conjecturer que l'état stable sera $(0,25 \quad 0,75)$.

**3)** **a)** On sait que : $P_{n+1} = P_n \times M$ donc, $(a_{n+1} \quad b_{n+1}) = (a_n \quad b_n)\begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} = (0,1a_n + 0,3b_n \quad 0,9a_n + 0,7b_n)$
Ainsi, on a bien : $b_{n+1} = 0,9\ a_n + 0,7\ b_n$.

**b)** On sait que : $a_n + b_n = 1$ donc, $a_n = 1 - b_n$.
Ainsi, $b_{n+1} = 0,9(1 - b_n) + 0,7\ b_n = 0,9 - 0,9\ b_n + 0,7\ b_n$ d'où, $b_{n+1} = -0,2\ b_n + 0,9$.

**4)** On considère la suite $u$ définie pour tout entier $n$ non nul par $u_n = b_n - 0,75$.

**a)** On a : $u_{n+1} = b_{n+1} - 0,75 = -0,2\ b_n + 0,9 - 0,75 = -0,2\ b_n + 0,15$
De l'égalité : $u_n = b_n - 0,75$ on déduit que : $b_n = u_n + 0,75$
Ainsi, $u_{n+1} = -0,2(u_n + 0,75) + 0,15 = -0,2\ u_n$.
Donc, la suite $(u_n)$ est géométrique de raison $-0,2$. Son premier terme est $u_1 = b_1 - 0,75 = 0,25$.

**b)** $(u_n)$ est une suite géométrique de raison $-0,2 \in\ ]-1 ; 1[$. Donc, $(u_n)$ converge vers 0.

**c)** Comme $b_n = u_n + 0,75$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 0,75$.

**5)** On suppose dans cette question que le premier jour de ses vacances, Alex ne va pas se baigner.
Donc, on a changé l'état initial : $P_1 = (1 \quad 0)$.
Comme $P_{20} = P_1 \times M^{19} = (0,25 \quad 0,75)$, la probabilité qu'il aille se baigner le 20$^e$ jour de ses vacances est égale à 0,75.