Bac ES – La Réunion – juin 2010

<u>Exercice 1 (4 points)</u>

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des questions, une seule réponse est exacte. Le candidat notera à chaque fois sur sa copie le numéro de la question suivi de la proposition qui lui semble correcte. Aucune justification n'est demandée.

Le barème sera établi comme suit :

pour une réponse exacte aux questions 1, 2, 3 et 4 : 0,5 point,
pour une réponse exacte aux questions 5 et 6 : 1 point,
pour une réponse fausse ou l'absence de réponse : 0 point.

Pour toutes les questions, on considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1\ ;+\infty[$ par :

$$f(x) = 2 - \frac{1}{x+1}$$

On appelle C sa courbe représentative dans un repère donné du plan.

1. On a :
- $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -1$
- $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 2$
- $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -\infty$.

2. La courbe C admet une asymptote d'équation :
- $y = 2$
- $y = -1$
- $x = 2$

3. Pour tout réel x de l'intervalle $]-1\ ;+\infty[$, $f(x)$ peut s'écrire :
- $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$
- $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$
- $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

4. Le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]-1\ ;+\infty[$ est donné par le tableau :

-

x	-1		$+\infty$
$f(x)$	$\|$	$+$	

-

x	-1		0		$+\infty$
$f(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	

-

x	-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	

5. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 1 est :
- $\dfrac{3}{2}$
- $\dfrac{1}{4}$
- $-\dfrac{1}{2}$

6. L'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan située entre la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$, est égale à :
- $-2 + \ln 2$
- $2 - \ln 2$
- $\dfrac{3}{2}$

Exercice 2 (5 points)

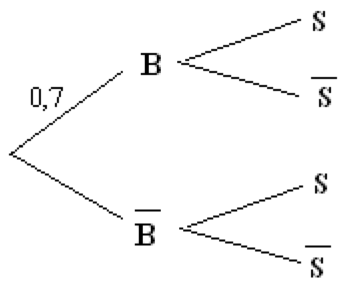
Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un chalutier se rend sur sa zone de pêche. La probabilité qu'un banc de poissons soit sur cette zone est de 0,7. Le chalutier est équipé d'un sonar pour détecter la présence d'un banc de poissons. Si un banc est présent, le sonar indique la présence du banc dans 80 % des cas. S'il n'y a pas de banc de poissons dans la zone de pêche, le sonar indique néanmoins la présence d'un banc dans 5 % des cas.

On note :

B l'événement : « il y a un banc de poissons sur zone » et $\overline{B}$ l'événement contraire de B,
S l'événement : « le sonar indique l'existence d'un banc de poissons » et $\overline{S}$ l'événement contraire de B,

1. Reproduire et compléter l'arbre pondéré suivant.
   Le détail des calculs n'est pas demandé.



2. Déterminer la probabilité $p(B \cap S)$ qu'il y ait un banc de poissons sur la zone et que le sonar le détecte.

3. Montrer que la probabilité que le sonar indique la présence d'un banc de poissons (réel ou fictif) est 0,575.

4. Lors d'une sortie en mer, le pêcheur se trouve dans l'une des trois situations suivantes :
   Situation 1 : un banc de poissons est présent sur la zone et le sonar le détecte. Le filet est lancé et la pêche est fructueuse. Dans ce cas le pêcheur gagne 2 000 euros.
   Situation 2 : il n'y a pas de banc de poissons sur zone mais le sonar en signale un. Le filet est lancé pour rien. Dans ce cas le pêcheur perd 500 euros.
   Situation 3 : le sonar ne détecte aucun banc de poissons (qu'il y en ait ou pas). Le filet n'est pas lancé et le bateau rentre au port à vide. Dans ce cas le pêcheur perd 300 euros.

   a. Reproduire et compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité du « gain » (positif ou négatif » réalisé.

Gain : x_i	2 000	–500	–300
Probabilité : p_i			

   b. Le pêcheur effectue de nombreuses sorties. Quel gain par sortie peut-il espérer avoir ?

5. Le pêcheur prévoit d'effectuer trois sorties successives sur la zone de pêche. Déterminer la probabilité que, pour les trois sorties, le sonar reste muet, c'est-à-dire n'indique pas la présence d'un banc de poissons. *On donnera la valeur approchée arrondie au millième de ce résultat.*

<u>**Exercice 2 (5 points)**</u>

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Une étude statistique est réalisée chaque trimestre sur une population composée initialement de fumeurs. Certains d'entre eux s'arrêtent de fumer, d'autres qui sont arrêté, redeviennent fumeur. On estime que :

- si un individu est fumeur, la probabilité qu'il arrête de fumer (qu'il devienne non fumeur) le trimestre suivant est 0,2 ;
- si un individu a arrêté de fumer (il est considéré alors comme non fumeur), la probabilité qu'il redevienne fumeur le trimestre suivant est 0,3.

On notera X l'événement « l'individu est fumeur » et Y l'événement « l'individu est non fumeur ».

1. Représenter les données précédentes par un graphe probabiliste et donner sa matrice de transition que l'on notera M (*aucune justification n'est demandée, on respectera l'ordre alphabétique des sommets*).

2. Pour un entier naturel n donné, on note x_n la proportion de fumeurs dans la population et y_n la proportion de non fumeurs au trimestre de rang n. On note $E_n = (x_n \quad y_n)$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste du système au trimestre de rang n.
   On étudie la population initiale où tous les individus sont fumeurs.
   On a donc : $E_0 = (1 \quad 0)$.
   a) Vérifier que la proportion de fumeurs à l'issue de deux trimestres est 0,7.
   b) Déterminer l'état E_4 de la population à l'issue d'une année.
3. La répartition fumeurs/non fumeurs de la population converge vers un état stable : $E = (x \quad y)$. Déterminer cet état.

Partie B

Le chiffre d'affaires d'un débitant de tabac sur une période donnée est fonction de deux variables : le nombre de consommateurs, c'est-à-dire de fumeurs, et le prix moyen du paquet de tabac.

On appelle z le chiffre d'affaire en milliers d'euros, x le nombre de consommateurs en milliers et y le prix du paquet de tabac en euros. On admettra que $z = xy$.

Dans l'espace, muni d'un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on désigne par S la surface d'équation $z = xy$.

1. Le débitant a pour clients 1 000 consommateurs réguliers et le prix moyen du paquet de tabac est de 5 euros.
   a) Quel est le chiffre d'affaires réalisé par le débitant ?
   b) Soit, dans un plan P parallèle au plan de base xOy, la ligne de niveau $z = 5$ de la surface S. On a tracé cette ligne de niveau sur la figure 1 donnée en annexe 1.
   Donner son équation de la forme $y = f(x)$.

2. Le nombre de consommateurs passe de 1 000 à 600. Quel devrait être, au centime d'euros près, le nouveau prix du paquet de tabac pour que le chiffre d'affaires du débitant reste égal à 5 000 € ?

Exercice 3 (5 points)

Commun à tous les candidats

L'Organisation des Nations Unies (ONU) a établi en 2008 des statistiques et des prévisions sur la population mondiale.
Le tableau suivant donne la population recensée par l'ONU. (*La population en 2010 est considérée par l'ONU comme très proche de la réalité compte tenu de la date à laquelle l'étude a été effectué*.)

Année	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010
Range de l'année : x_i	1	2	3	4	5	6	7
Population (en millions de personnes) : y_i	2 529	3 023	3 686	4 438	5 290	6 115	6 908

1. a) Calculer l'augmentation de population entre les années 1950 et 1960, puis entre les années 1970 et 1980, puis entre les années 1990 et 2000.
Un ajustement affine est-il pertinent ?
b) Calculer le pourcentage d'augmentation de la population mondiale entre les années 1990 et 2000. *On donnera la valeur arrondie à 0,1 % près*.

2. On envisage un ajustement exponentiel.
a) Pour chaque année x_i, calculer ln y_i et compléter le tableau suivant sur la feuille donnée en annexe 2 avec les valeurs approchées arrondies à 0,01 près.

Année	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010
x_i	1	2	3	4	5	6	7
$z_i = \ln y_i$							

b) Représenter le nuage de points $M_i\ (x_i\,;\,z_i)$ sur la feuille donnée en annexe 2.

3. a) Déterminer une équation de la droite d'ajustement de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés. *Aucune justification n'est demandée, les calculs seront effectués avec la calculatrice et les coefficients arrondis au millième*.
b) Tracer cette droite d'ajustement sur le graphique de la question 2.

4. Déduire de l'ajustement précédent l'expression de la population y donnée en fonction du rang x de l'année, sous la forme : $y = \mathrm{A}e^{\mathrm{B}x}$ où A et B sont des nombres réels à déterminer. *On arrondira* A *à l'unité et* B *au millième*.

5. On suppose que $y = 2\,180\,e^{0,171x}$. Quelle estimation peut-on donner pour la population mondiale en 2030 ?
On donnera les valeurs approchées arrondies au million près.

Exercice 4 (6 points)

Commun à tous les candidats

Suite à un accident industriel, un gaz se répand dans un local d'usine.
L'évolution du taux de gaz dans l'air peut être modélisé grâce à la fonction f définie l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = 2x\,\mathrm{e}^{-x}$$

où x est le nombre de minutes écoulées depuis l'accident et $f(x)$ le taux de gaz dans l'air exprimé en parties pour million (ppm).

1. **a)** On rappelle que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}}\right) = 0$. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b) On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
Calculer $f'(x)$ et étudier son signe pour x élément de l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
Donner le tableau complet des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

2. On admet que le taux de gaz dans l'air est négligeable après 5 minutes. C'est pourquoi, dans la suite de l'exercice, on restreindra l'étude de la fonction f à l'intervalle $[0\,;5]$.
Le plan est muni d'un repère orthogonal. La courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;5]$ est donnée en annexe 3.

a) Vérifier que la fonction F définie sur l'intervalle $[0\,;5]$ par $F(x) = (-2-2x)\,\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de f sur cet intervalle.

b) Calculer la valeur moyenne m (exprimée en ppm) du taux de gaz pendant les 5 minutes.
On déterminera la valeur exacte de m puis on donnera sa valeur approchée arrondie à 0,01 ppm près.

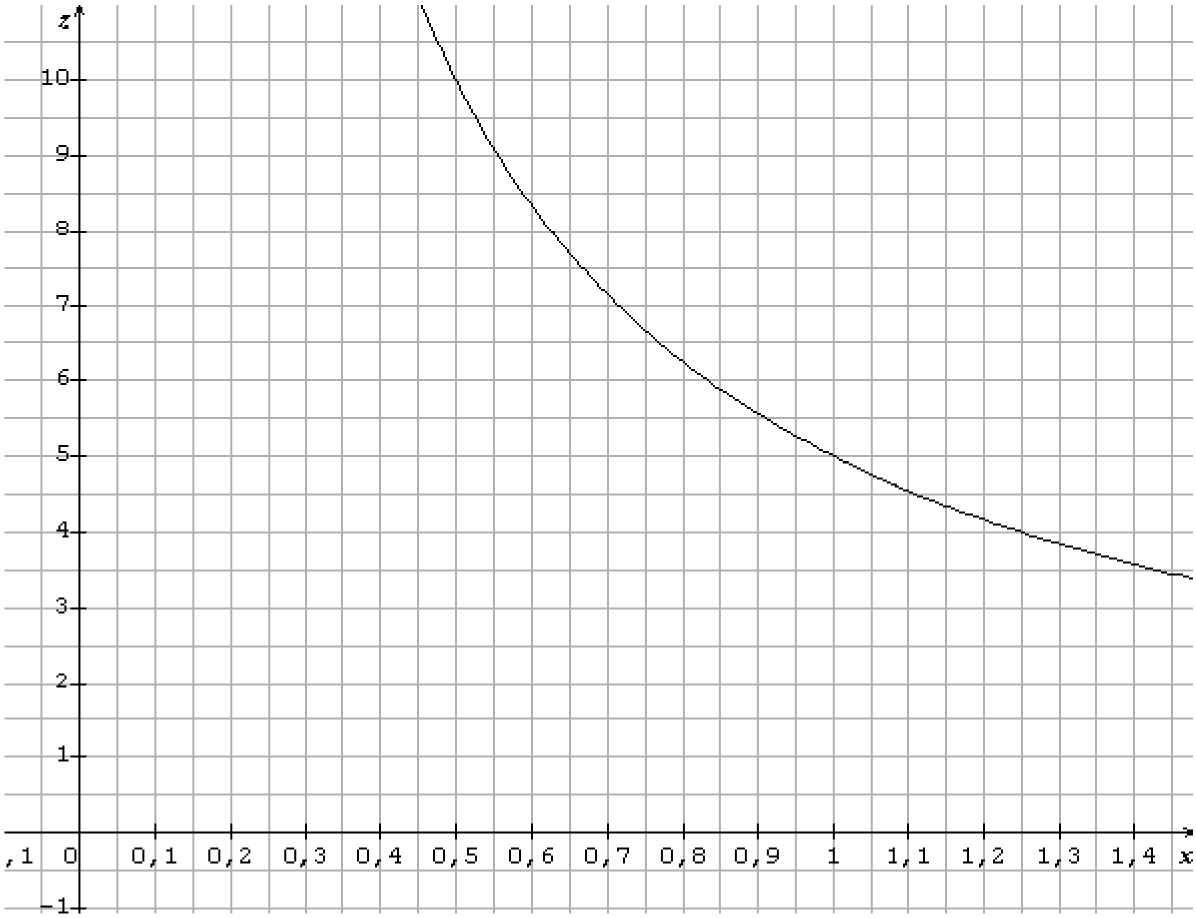
3. ***Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation***.

On considère que le gaz a un effet irritant pour l'organisme si le taux dépasse 0,65 ppm pendant plus d'une minute. Déterminer si le personnel de l'usine a été affecté ou non par la fuite de gaz, en explicitant la démarche.

ANNEXE 1

EXERCICE 2 (*candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*)

Ligne de niveau $z = 5$ de la surface S.



ANNEXE 2 (à rendre avec la copie)

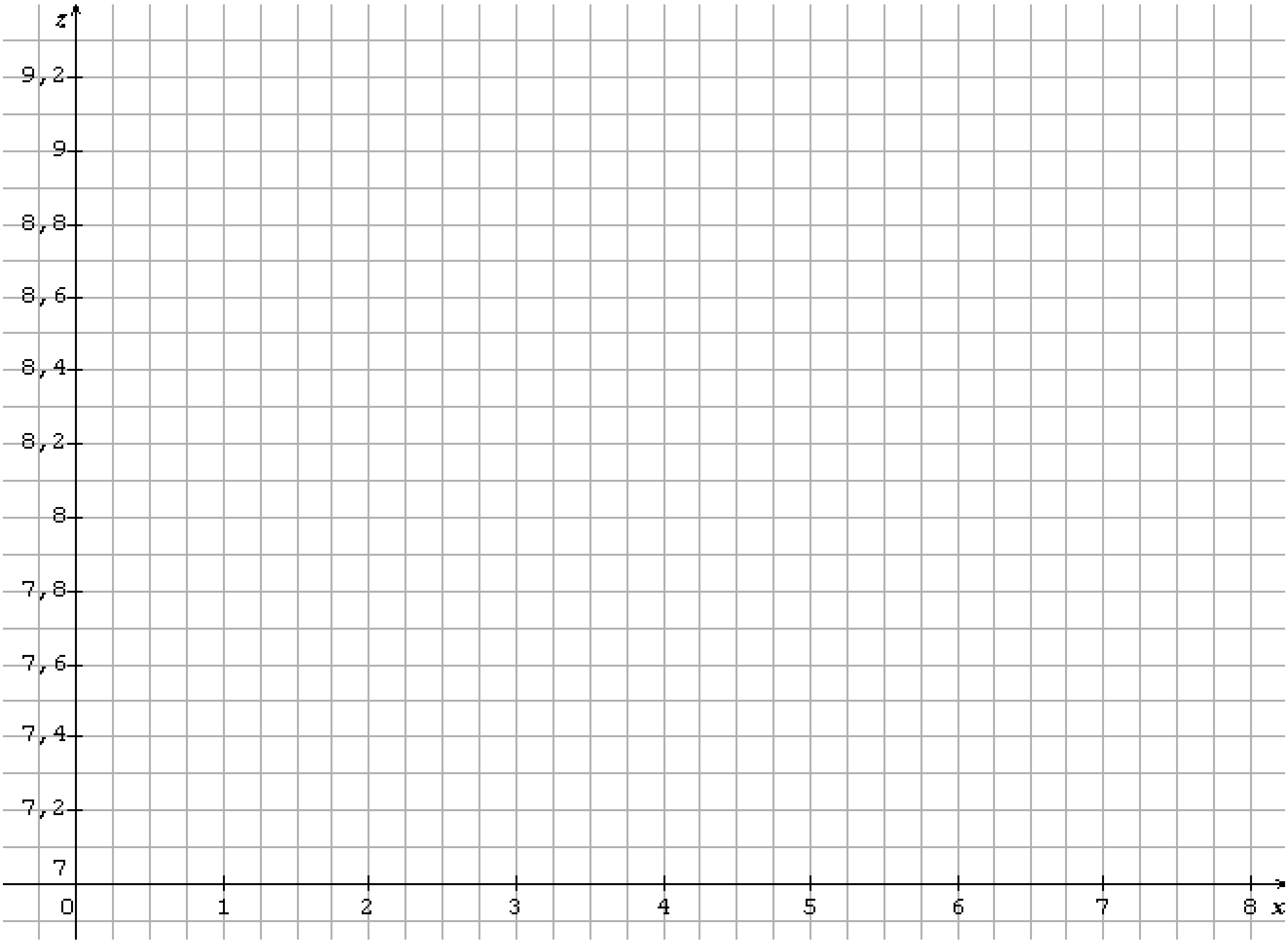
EXERCICE 3 (*commun à tous les candidats*)

<u>Question 2</u> :

Tableau à compléter :

Année	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010
x_i	1	2	3	4	5	6	7
$z_i = \ln y_i$							

Représentation du nuage de points $M_i\ (x_i\ ;\ z_i)$:



ANNEXE 3 (à rendre avec la copie)

EXERCICE 4 (*commun à tous les candidats*)

Représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 5].