Correction Bac ES – Liban – juin 2010

EXERCICE 1 **(4 points)**

Commun à tous les candidats

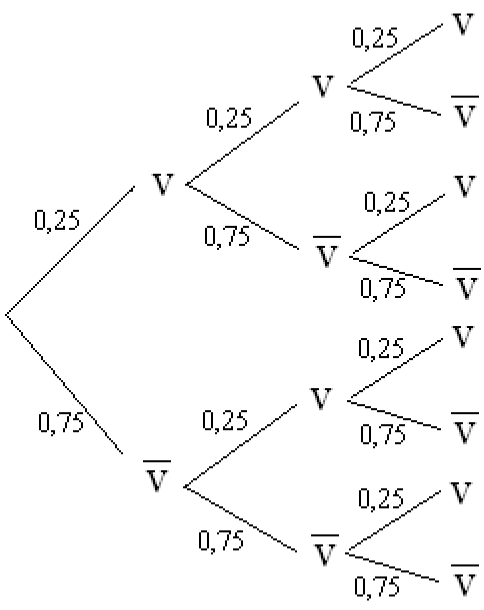
1) A et B sont deux événements indépendants et on sait que $p(A) = 0,5$ et $p(B) = 0,2$.
La probabilité de l'événement A ∪ B est égale à : Réponse **B** : 0,6

En effet, $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
et comme A et B sont indépendants, $p(A \cap B) = p(A) \times p(B) = 0,5 \times 0,2 = 0,1$.
Par suite, $p(A \cup B) = 0,5 + 0,2 - 0,1 = 0,6$.

2) Dans un magasin, un bac contient des cahiers soldés. On sait que 50 % des cahiers ont une reliure spirale et que 75 % des cahiers sont à grands carreaux. Parmi les cahiers à grands carreaux, 40 % ont une reliure spirale.
Adèle choisit au hasard un cahier à reliure spirale. La probabilité qu'il soit à grands carreaux est égale à : Réponse **C** : 0,6

En effet, en notant S l'événement « Obtenir un cahier à spirale », G l'événement « Obtenir un cahier à grands carreaux » on peut traduire les données par les probabilités suivantes :
$p(S) = 0,5$; $p(G) = 0,75$ et $p_G(S) = 0,4$.
On cherche à déterminer $p_S(G)$.
Or, $p_S(G) = \dfrac{p(S \cap G)}{p(S)} = \dfrac{p(G) \times p_G(S)}{p(S)} = \dfrac{0,75 \times 0,4}{0,5} = 0,6$

Dans les questions **3)** et **4)**, on suppose que dans ce magasin, un autre bac contient une grande quantité de stylos-feutres en promotion. On sait que 25 % de ces stylos-feutres sont verts. Albert prélève au hasard et de manière indépendante 3 stylos-feutres.
Ainsi, on a un schéma de Bernoulli à 3 épreuves dont le succès V : « Obtenir un stylo-feutre vert » a pour probabilité $p(V) = 0,25$.



3) La probabilité, arrondie à 10^{-3} près, qu'il prenne au moins un stylo-feutre vert est égale à :
Réponse **C** : 0,578

En effet, p(« Obtenir au moins un stylo-feutre vert »)
= 1 – p(« Obtenir aucun stylo-feutre vert »)
$= 1 - (1 - 0,25)^3 = 0,578$ à 10^{-3} près.

4) La probabilité, arrondie à 10^{-3} près, qu'il prenne exactement 2 stylos-feutres verts est égale à :
Réponse **C** : 0,141

En effet, p(« Obtenir exactement deux stylos-feutres verts ») $= 3 \times 0,25^2 \times 0,75 = 0,141$ à 10^{-3} près.

EXERCICE 2 **(5 points)**

Commun à tous les candidats

1) **a)** $g(0) = 6$.

b) $g'(0) = -2$. En effet, $g'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente (EF) soit, $\dfrac{y_F - y_E}{x_F - x_E}$

c) $g'(x) = 1 + ak\,e^{ax}$.

d) $g(0) = 0 + ke^{a\times 0} = k$. Donc, $k = 6$.

$g'(0) = 1 + ake^{a\times 0} = 1 + ak = 1 + 6a = -2$ donc, $a = -0{,}5$.

2) $g(x) - x = 6e^{-0,5x}$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} (-0{,}5x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0$ donc, par composée, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-0,5x} = 0$.

Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} [g(x) - x] = 0$ et ainsi, la droite D est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

3) **a)** Hachurer S sur le graphique. Voir ci-dessous.

b) On a : $A = \int_0^4 (g(x) - x)\,dx$ unités d'aire et 1 u.a. = 2×1 cm².

Or, $\int_0^4 (g(x) - x)\,dx = \int_0^4 6e^{-0,5x}\,dx = F(4) - F(0)$ avec $F(x) = -12e^{-0,5x}$ primitive de $f(x) = 6e^{-0,5x}$.

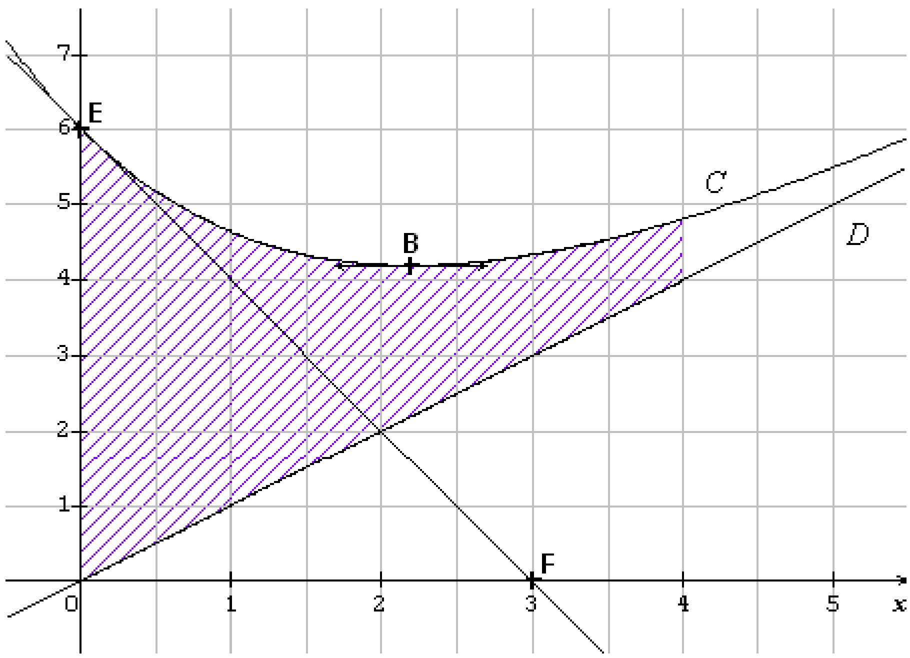
$= -12\,e^{-2} + 12 = 12(1 - e^{-2})$

Par suite, $A = 24(1 - e^{-2}) \approx 20{,}8$ cm².

4) Comme la tangente à la courbe C au point B est parallèle à l'axe des abscisses, l'abscisse du point B est solution de l'équation $g'(x) = 0$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 3e^{-0,5x} = 0 \Leftrightarrow e^{-0,5x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow -0{,}5x = \ln(\frac{1}{3}) \Leftrightarrow 0{,}5x = \ln(3) \Leftrightarrow x = 2\ln(3)$.

Ainsi, le point B a pour abscisse 2ln(3).



EXERCICE 3 **(6 points)**

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction f, définie sur l'intervalle $]0 ; 20]$ par $f(x) = (3e^2 - x)\ln x + 10$.

1) **a)** $\lim\limits_{x \to 0} (3e^2 - x) = 3e^2$ et $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$ donc, par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} (3e^2 - x)\ln x = -\infty$.

Ainsi, par somme, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$.

b) $f(e^2) = (3e^2 - e^2)\ln(e^2) + 10 = 4e^2 + 10 \approx 39{,}56$.

2) On a : $f(x) = u(x)v(x) + k$ avec $u(x) = 3e^2 - x$, $v(x) = \ln x$ et $k = 10$.

Ainsi, $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ avec $u'(x) = -1$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x}$

D'où, $f'(x) = -\ln x + (3e^2 - x)\times\dfrac{1}{x}$ soit, $f'(x) = -\ln x + \dfrac{3e^2}{x} - 1$.

3) **a)** La fonction f' est strictement décroissante sur $]0 ; 20]$ et s'annule pour $x = e^2$.

Ainsi, $f'(x) > 0$ sur $]0 ; e^2[$, $f'(x) = 0$ pour $x = e^2$ et $f'(x) < 0$ sur $]e^2 ; 20]$.

b) De la question précédente, on déduit que la fonction f est croissante sur $]0 ; e^2]$ et décroissante sur $[e^2 ; 20]$. On a donc le tableau de variation suivant :

x	0	e^2	$+\infty$
signe de $f'(x)$	$+$	0	$-$
f	$-\infty$ ↗	$4e^2 + 10$	↘ $f(20)$

Avec $f(20) = (3e^2 - 20)\ln(20) + 10 \approx 16{,}5$.

4) **a)** Sur $[0{,}6 ; 0{,}7]$, la fonction f est continue et strictement croissante.

Par ailleurs, $f(0{,}6) \approx -1{,}017 < 0$ et $f(0{,}7) \approx 2{,}34 > 0$.

Donc, d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0{,}6 ; 0{,}7]$.

En utilisant les tables de valeurs de la calculatrice, on trouve : $\alpha = 0{,}629$ à 10^{-3} près par excès.

b) Sur l'intervalle $]0 ; e^2]$, la fonction f est strictement croissante et s'annule en α, donc, la fonction f est négative sur $]0 ; \alpha]$ et positive sur $[\alpha ; e^2]$.

De plus, sur $[e^2 ; 20]$ la fonction f a pour minimum $f(20)$ et ce minimum est positif, et donc, la fonction f est positive sur $[e^2 ; 20]$.

Finalement, $f(x)$ est négatif pour tout $x \in]0 ; \alpha[$ et $f(x)$ est positif pour tout $x \in]\alpha ; 20]$.

Partie B

Une entreprise produit et vend chaque semaine x milliers de DVD, x appartenant à $]0 ; 20]$.
Le bénéfice réalisé est égal à $f(x)$ milliers d'euros où f est la fonction étudiée dans la partie A.

1) On a : $f(x) > 0$ pour $x > \alpha$ et $\alpha = 0{,}629$ à 10^{-3} près par excès.

Ainsi, il faut fabriquer au minimum 629 DVD pour obtenir un bénéfice positif.

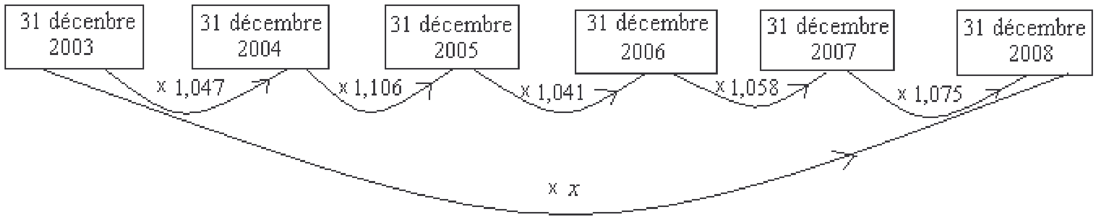
2) La fonction f atteint son maximum pour $x = e^2 = 7{,}389$ à 10^{-3} près et $f(e^2) = 4e^2 + 10 = 39{,}56$ à 10^{-2} près.

Donc, pour une production de 7 389 DVD, l'entreprise atteint un bénéfice maximal de 39 560 €.

EXERCICE 4 **(5 points)**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1) **a)** Entre le 31 décembre 2003 et le 31 décembre 2008, on a l'évolution suivante :

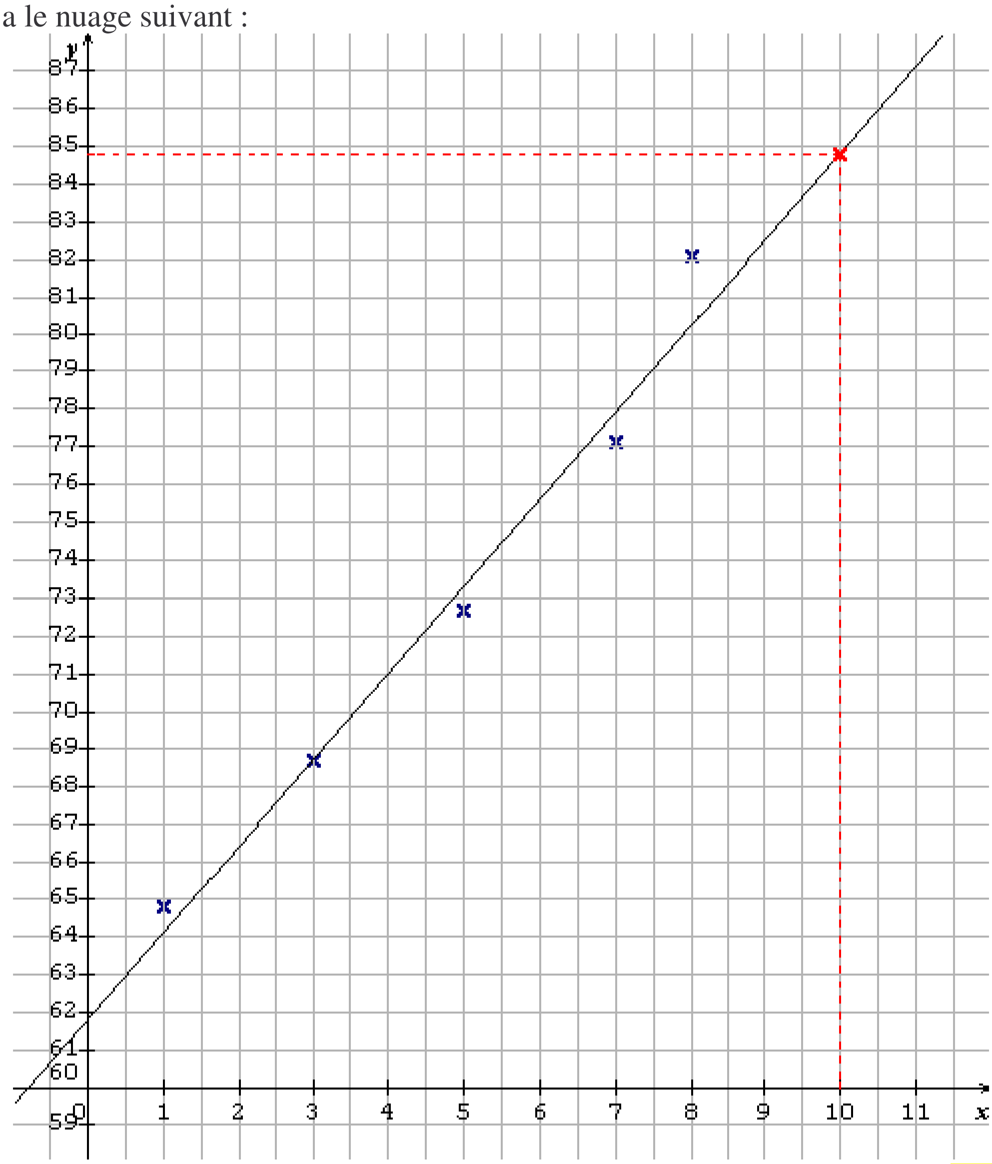


Donc, le coefficient multiplicateur global est : $1{,}047\times1{,}106\times1{,}041\times1{,}058\times1{,}075$.
En notant x le coefficient multiplicateur associé au pourcentage annuel moyen d'augmentation, on a :
$x^5 = 1{,}047\times1{,}106\times1{,}041\times1{,}058\times1{,}075$

donc, $x = \sqrt[5]{1{,}047\times1{,}106\times1{,}041\times1{,}058\times1{,}075} \approx 1{,}065$
Donc, le pourcentage annuel moyen d'augmentation est de 6,5 %.

b) On a : $59{,}5\times1{,}065^2 \approx 67{,}49$
Donc, en 2010, avec cette croissance annuelle de 6,5 %, on peut prévoir un chiffre d'affaire de 67,5 milliards d'euros.

2) **a)** On a le nuage suivant :



b) L'équation de la droite d'ajustement par la méthode des moindres carrés est : $y = 2{,}3\ x + 61{,}8$.

c) L'année 2010 a pour rang $x = 10$. Par lecture graphique, on a : $y = 84{,}8$.

Ainsi, on peut estimer qu'en 2010, la société Aupré aura pour chiffre d'affaires 84,8 milliards d'euros.

3) **a)** $59{,}5\times1{,}065^n > 82{,}1\times1{,}03^n \Leftrightarrow \dfrac{1{,}065^n}{1{,}03^n} > \dfrac{82{,}1}{59{,}5} \Leftrightarrow \left(\dfrac{1{,}065}{1{,}03}\right)^n > \dfrac{82{,}1}{59{,}5} \Leftrightarrow n\ln\left(\dfrac{1{,}065}{1{,}03}\right) > \ln\left(\dfrac{82{,}1}{59{,}5}\right)$

$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln\left(\dfrac{82{,}1}{59{,}5}\right)}{\ln\left(\dfrac{1{,}065}{1{,}03}\right)}$$

b) Le chiffre d'affaire du groupe Enville progresse chaque année de 6,5 %, il est donc multiplié chaque année par 1,065. Ainsi, le chiffre d'affaire du groupe Enville suit une suite géométrique de raison 1,065. Donc, l'année 2008+n, le chiffre d'affaire sera de : $59{,}5\times1{,}065^n$.

De même, le chiffre d'affaire du groupe Aupré progresse chaque année de 3 % et donc, l'année 2008+n, le chiffre d'affaire sera de : $82{,}1\times1{,}03^n$.

On cherche donc l'année 2008+n telle que : $59{,}5\times1{,}065^n > 82{,}1\times1{,}03^n$.

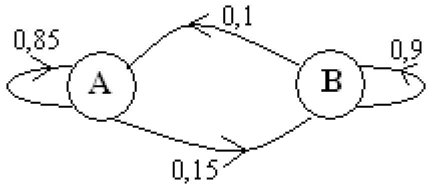
Or, d'après la question cette inéquation est vérifiée dés que $n > \dfrac{\ln\left(\dfrac{82{,}1}{59{,}5}\right)}{\ln\left(\dfrac{1{,}065}{1{,}03}\right)}$ et $\dfrac{\ln\left(\dfrac{82{,}1}{59{,}5}\right)}{\ln\left(\dfrac{1{,}065}{1{,}03}\right)} \approx 9{,}63$.

C'est donc, à partir de 2018, que le chiffre d'affaires du groupe Enville dépassera celui du groupe Aupré.

EXERCICE 4 **(5 points)**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1) **a)** On a le graphe probabiliste suivant :



b) La matrice de transition associée à ce graphe est : $M = \begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}$.

2) $M^3 = \begin{pmatrix} 0{,}653 & 0{,}347 \\ 0{,}231 & 0{,}769 \end{pmatrix}$ où les coefficients sont arrondis à 10^{-3} près.

On a : $P_4 = P_1 \times M^3 = (0{,}7 \quad 0{,}3) \times \begin{pmatrix} 0{,}653 & 0{,}347 \\ 0{,}231 & 0{,}769 \end{pmatrix} = (0{,}5264 \quad 0{,}4736)$

Ainsi, la 4ème semaine, 52,64 % des téléspectateurs ont regardé la chaîne A et 47,36 % ont regardé la chaîne B.

3) On considère la matrice ligne $P = (a \quad b)$, où a et b sont deux réels tels que $a + b = 1$.

a) $P = PM \Leftrightarrow (a \quad b) = (a \quad b)\begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (a \quad b) = (0{,}85a + 0{,}1b \quad 0{,}15a + 0{,}9b)$

Ainsi, $a = 0{,}85a + 0{,}1b$ soit, $0{,}15a - 0{,}1b = 0$.

Or, $a + b = 1$ et donc, $b = 1 - a$.

Par suite, $0{,}15a - 0{,}1(1 - a) = 0 \Leftrightarrow 0{,}25a = 0{,}1 \Leftrightarrow a = 0{,}4$ et ainsi, $b = 0{,}6$.

b) La matrice $P = (0{,}4 \quad 0{,}6)$ est telle que $P = PM$, donc P est la matrice stable du graphe probabiliste. Ainsi, à long terme, 40 % des téléspectateurs regardent la chaîne A et 60 % regardent la chaîne B.

4) On admet que pour tout entier naturel $n > 0$, on a : $a_n = 0{,}4 + 0{,}3\times\left(0{,}75^{n-1}\right)$.

a) $a_n < 0{,}5 \Leftrightarrow 0{,}4 + 0{,}3\times\left(0{,}75^{n-1}\right) < 0{,}5 \Leftrightarrow 0{,}3\times\left(0{,}75^{n-1}\right) < 0{,}1 \Leftrightarrow 0{,}75^{n-1} < \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow \ln\left(0{,}75^{n-1}\right) = \ln\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow (n-1)\ln(0{,}75) < -\ln(3) \Leftrightarrow n - 1 > \frac{-\ln(3)}{\ln(0{,}75)}$ car $\ln(0{,}75) < 0$.

$\Leftrightarrow n > 1 - \frac{\ln(3)}{\ln(0{,}75)}$

b) On cherche le plus petit entier n tel que : $b_n > a_n \Leftrightarrow a_n < 0{,}5$ car $a_n + b_n = 1$.

D'après la question précédente, cette inéquation a pour solution $n > 1 - \frac{\ln(3)}{\ln(0{,}75)}$

Or, $1 - \frac{\ln(3)}{\ln(0{,}75)} \approx 4{,}81$

C'est donc à partir de la 5ème semaine que l'audience de la chaîne B dépassera celle de la chaîne A.