Correction Bac ES – Centres étrangers – juin 2010

EXERCICE 1 (5 points)

Commun à tous les candidats

1) Le nombre réel $e^{\frac{3x}{2}}$ est égale à : **c)** $\left(\sqrt{e^x}\right)^3$

En effet, $e^{\frac{3x}{2}} = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^3 = \left(\sqrt{e^x}\right)^3$.

Remarque : $\dfrac{e^{3x}}{e^2} = e^{3x-2}$ et l'expression $e^{3x} - e^2$ ne se simplifie pas.

2) L'équation $\ln(x^2 + x + 1) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$: **c)** Deux solutions

En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + x + 1 > 0$ (le discriminant de ce trinôme est négatif)

Et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(x^2 + x + 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 1 \Leftrightarrow x(x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -1$.

3) L'équation $e^x = e^{-x}$ admet sur $\mathbb{R}$: **b)** Une seule solution

En effet, $e^x = e^{-x} \Leftrightarrow \ln(e^x) = \ln(e^{-x}) \Leftrightarrow x = -x \Leftrightarrow x = 0$.

4) On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[1\ ;+\infty[$ vérifiant la propriété suivante : Pour tout $x \in [1\ ;+\infty[$, $\dfrac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant 1$.

On peut alors affirmer que : **a)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$

En effet, pour tout $x \in [1\ ;+\infty[$, $\dfrac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x^2} \leqslant \dfrac{f(x)}{x} \leqslant \dfrac{1}{x}$

Comme, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.

5) On considère deux fonctions f et g définies sur un intervalle I, telles que g est une primitive de la fonction f sur I. On suppose que la fonction g est croissante sur I. Alors on peut affirmer que : **b)** La fonction f est positive sur I.

En effet, comme g est une primitive de f, on a : $g'(x) = f(x)$.

De plus, g est croissante sur I et donc sa dérivée est positive sur I.

EXERCICE 2 (5 points)
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A : Etude statistique

1) $\dfrac{271{,}7 + 321{,}4 + 443 + 540{,}1 + 613{,}1 + 683{,}5 + 773{,}4 + 872{,}6}{8} = 564{,}85$

Donc, la dette moyenne de l'État entre 1990 et 2004 est de 564,9 milliards d'euros.

2) On a le tableau suivant :

Année	1990	1992	1994	1996	1998	2000	2002	2004
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
Dette y_i en milliards d'euros	271,7	321,4	443	540,1	613,1	683,5	773,4	872,6
Indice	100	118,3	163	198,8	225,7	251,6	284,7	321,2

3) On a : $321{,}2 - 100 = 221{,}2$
Donc, le taux global d'évolution de la dette de l'État entre 1990 et 2004 est de 221,2 %.

4) Le coefficient multiplicateur global est égal à 3,212.
Notons x le coefficient multiplicateur correspondant au taux moyen d'évolution de la dette sur une période de 2 ans.

Alors, on a : $x^7 = 3{,}212$ et donc, $x = \sqrt[7]{3{,}212} = 1{,}181$ à 10^{-3} près.
Donc, le taux moyen d'évolution de la dette de l'État sur une période de 2 ans est de 18,1 %.

Partie B : Interpolation et extrapolation de données.

1) Une équation de la droite d'ajustement affine de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés est : $y = 86{,}4\,x + 262{,}3$ (coefficients arrondis à 10^{-1} près)

2) On cherche x tel que : $86{,}4\,x + 262{,}3 > 1\,000 \Leftrightarrow x > \dfrac{1000 - 262{,}3}{86{,}4}$ et $\dfrac{1000 - 262{,}3}{86{,}4} \approx 8{,}54$

C'est donc à partir de l'année de rang 9, c'est-à-dire 2008, que la dette dépassera 1 000 milliards d'euros.

3) On cherche x tel que : $86{,}4\,x + 262{,}3 > 2\times683{,}5$

$$\Leftrightarrow 86{,}4\,x > 1367 - 262{,}3$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{1104{,}7}{86{,}4}$$

Comme $\dfrac{1104{,}7}{86{,}4} \approx 12{,}79$ c'est à partir de l'année de rang 13, c'est-à-dire 2016, que la dette de l'État sera le double de la dette de l'an 2000.

EXERCICE 2 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1) En 2010 (2010 + 0), la forêt possède 50 milliers d'arbres et donc, $u_0 = 50$.
L'année (2010 + n), la forêt possède u_n milliers d'arbres. On en abat 5 % et donc, il en restera 0,95 u_n, auxquels on ajoutera 3 milliers de nouveaux arbres.
Donc, l'année (2010 + n + 1) il y aura 0,95 u_n + 3 milliers d'arbres.
D'où, $u_{n+1} = 0{,}95\, u_n + 3$.

2) On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = 60 - u_n$.

a) Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 60 - u_{n+1} = 60 - 0{,}95\, u_n - 3 = 57 - 0{,}95\, u_n$.

$$v_{n+1} = 0{,}95\left(\frac{57}{0{,}95} - u_n\right) = 0{,}95(60 - u_n)$$

Ainsi, $v_{n+1} = 0{,}95\, v_n$. Donc, la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95.

b) On a : $v_0 = 60 - u_0 = 60 - 50 = 10$.
Comme la suite (v_n) est géométrique de raison 0,95 on a : $v_n = v_0 \times 0{,}95^n = 10 \times 0{,}95^n$.

c) Comme $v_n = 60 - u_n$ on a : $u_n = 60 - v_n = 60 - 10\times 0{,}95^n$.

3) $2015 = 2010 + 5$ et $u_5 = 60 - 10\times 0{,}95^5 = 52{,}262$ à 10^{-3} près.
Donc, en 2015, la forêt possèdera 52 262 d'arbres.

4) **a)** $u_{n+1} - u_n = 60 - 10\times 0{,}95^{n+1} - 60 + 10\times 0{,}95^n = 10\times 0{,}95^n(-0{,}95 + 1) = 0{,}5\times 0{,}95^n$.

b) Comme pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = 0{,}5\times 0{,}95^n$ et $0{,}5\times 0{,}95^n > 0$ (produit de nombre positif), on a : $u_{n+1} - u_n > 0$ pour tout entier naturel n.
Ainsi, la suite (u_n) est strictement croissante.

5) On cherche n tel que : $u_n > 1{,}1\times u_0 \Leftrightarrow u_n > 55 \Leftrightarrow 60 - 10\times 0{,}95^n > 55$

$$\Leftrightarrow 10\times 0{,}95^n < 5 \Leftrightarrow 0{,}95^n < 0{,}5$$
$$\Leftrightarrow \ln(0{,}95^n) < \ln(0{,}5) \Leftrightarrow n\ln(0{,}95) < \ln(0{,}5)$$
$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}95)} \text{ car } \ln(0{,}95) < 0.$$

Comme $\dfrac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}95)} \approx 13{,}51$ c'est à partir de l'année 2024 (2010 + 14) que le nombre d'arbres de la forêt aura dépassé de 10 % le nombre d'arbres de la forêt en 2010.

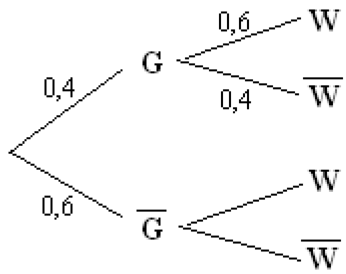
6) On a : $u_n = 60 - 10\times 0{,}95^n$.
Comme $0{,}95 \in\,]-1\,;\,1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(0{,}95)^n = 0$ et donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 60$.
Ainsi, à long terme, la forêt possèdera environ 60 milliers d'arbres.

EXERCICE 3 (5 points)

Commun à tous les candidats

1) Sur l'ensemble des téléphones portables, 40 % possèdent l'option GPS, donc : $p(G) = 0,4$
Parmi les téléphones avec l'option GPS, 60 % ont l'option Wifi donc : $p_G(W) = 0,6$.

2) On a l'arbre suivant :



3) $p(G \cap W) = p(G) \times p_G(W) = 0,4 \times 0,6 = 0,24$
Donc, la probabilité de l'événement « le téléphone possède les deux options » est égale à 0,24.

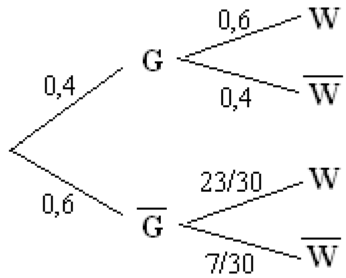
4) On a : $p_{\overline{G}}(W) = \dfrac{p(\overline{G} \cap W)}{p(\overline{G})}$

Or, comme G et $\overline{G}$ forment une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales, on a : $p(W) = p(G \cap W) + p(\overline{G} \cap W)$

Donc, $p(\overline{G} \cap W) = p(W) - p(G \cap W) = 0,7 - 0,24 = 0,46$

Par suite, $p_{\overline{G}}(W) = \dfrac{0,46}{0,6} = \dfrac{23}{30}$.

On obtient l'arbre complété ci-contre :



5) $p_W(\overline{G}) = \dfrac{p(\overline{G} \cap W)}{p(W)} = \dfrac{0,46}{0,7} = \dfrac{23}{35}$

Donc, sachant que le téléphone possède l'option Wifi, la probabilité qu'il ne possède pas l'option GPS est égale à $\dfrac{23}{35}$

6) Le coût de revient peut être :

☞ de 18 € et sa probabilité est : $p(G \cap W) = 0,24$.

☞ de 12 € et sa probabilité est : $p(G \cap \overline{W}) = 0,4 \times 0,4 = 0,16$.

☞ de 6 € et sa probabilité est : $p(\overline{G} \cap W) = 0,46$.

☞ de 0 € et sa probabilité est : $p(\overline{G} \cap \overline{W}) = 0,6 \times \dfrac{7}{30} = 0,14$.

Ainsi, la loi de probabilité du coût de revient de ces deux options est :

Coût de revient	0	6	12	18
Probabilité	0,14	0,46	0,16	0,24

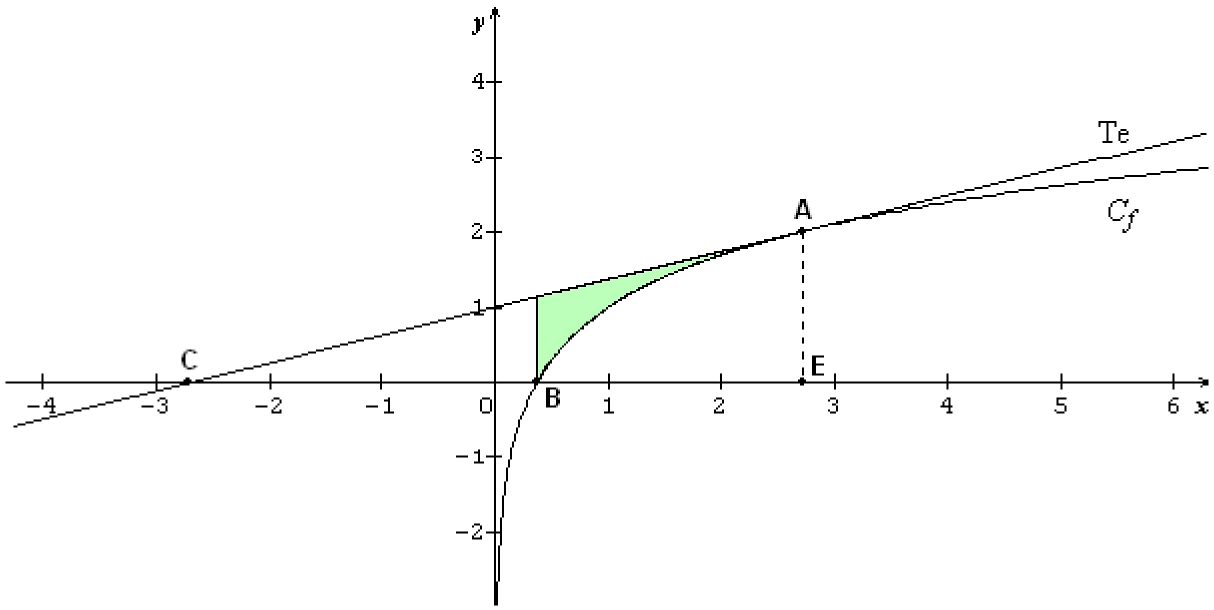
7) $E = 0 \times 0,14 + 6 \times 0,46 + 12 \times 0,16 + 18 \times 0,24 = 9$.
Ainsi, le coût de revient moyen d'un téléphone est de 9 €.

EXERCICE 4 (5 points)

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 1 + \ln(x)$.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère du plan.
Le point A $(e\,;2)$ appartient à $\mathscr{C}_f$ et on note T_e la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A.
Le point C est le point d'intersection de la tangente T_e et de l'axe des abscisses.
Le point E a pour coordonnées $(e\,;0)$.

On admettra que sur $]0\,;+\infty[$, $\mathscr{C}_f$ reste en dessous de T_e.



1) **a)** Le point B est le point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et de l'axe des abscisses, donc l'abscisse du point B est solution de l'équation $f(x) = 0$.

Or, $f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$

Donc, le point B a pour coordonnées $(e^{-1}\,;0)$.

b) $x \geqslant \dfrac{1}{e} \Leftrightarrow \ln(x) \geqslant \ln(e^{-1}) \Leftrightarrow \ln(x) \geqslant -1 \Leftrightarrow 1 + \ln(x) \geqslant 0$

Donc, pour $x \geqslant \dfrac{1}{e}$ on a bien : $f(x) \geqslant 0$.

2) **a)** La tangente T_e a pour équation : $y = f'(e)\times(x - e) + f(e)$.

Or, $f(e) = 1 + \ln(e) = 2$ et $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ et donc, $f'(e) = \dfrac{1}{e}$

Donc, une équation de T_e est : $y = \dfrac{1}{e}(x - e) + 2$ soit, $y = \dfrac{1}{e}x + 1$.

b) Le point C est l'intersection de la droite T_e avec l'axe des abscisses.

Ainsi, l'abscisse de C est telle que : $\frac{1}{e}x_C + 1 = 0 \Leftrightarrow x_C = -e$.

Donc, le point C a pour coordonnées (–e ; 0).

c) On a : C (–e ; 0) et E (e ; 0).

Le milieu du segment [CE] a pour coordonnées $\left(\frac{x_C + x_E}{2} ; \frac{y_C + y_E}{2}\right) = (0 ; 0)$

Donc, les points E et C sont bien symétriques par rapport à O.

On considère la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = x \ln x$.

3) **a)** $g(x) = u(x)\times v(x)$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = \ln x$

Donc, $g'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ avec $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$

D'où, $g'(x) = 1\times\ln x + x\times\frac{1}{x} = 1 + \ln x = f(x)$.

Donc, la fonction g est bien une primitive de la fonction f sur $]0 ; +\infty[$.

b) $\int_{\frac{1}{e}}^{e}(1 + \ln x)\,dx = g(e) - g\left(\frac{1}{e}\right) = e\ln(e) - \frac{1}{e}\ln\left(\frac{1}{e}\right)$ d'où, $\int_{\frac{1}{e}}^{e}(1 + \ln x)\,dx = e + \frac{1}{e}$

Ainsi, l'aire de la partie du plan comprise entre $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \frac{1}{e}$ et $x = e$ vaut $e + \frac{1}{e}$ unités d'aire.

4) L'aire de la partie du plan comprise entre la droite T_e, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \frac{1}{e}$ et $x = e$ est égale à : $\int_{\frac{1}{e}}^{e}\left(\frac{1}{e}x + 1\right)dx$ unités d'aire.

La fonction $h(x) = \frac{1}{e}x + 1$ a pour primitive $H(x) = \frac{1}{2e}x^2 + x$.

Ainsi, $\int_{\frac{1}{e}}^{e}\left(\frac{1}{e}x + 1\right)dx = H(e) - H\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{e}{2} + e - \frac{1}{2e^3} - \frac{1}{e} = \frac{3}{2}e - \frac{1}{2e^3} - \frac{1}{e}$

Par suite, l'aire grisée vaut : $\int_{\frac{1}{e}}^{e}\left(\frac{1}{e}x + 1\right)dx - \int_{\frac{1}{e}}^{e}(1 + \ln x)\,dx = \frac{3}{2}e - \frac{1}{2e^3} - \frac{1}{e} - e - \frac{1}{e}$

D'où, l'aire grisée vaut $\frac{1}{2}e - \frac{1}{2e^3} - \frac{2}{e} \approx 0{,}598$ unité d'aire.