EXERCICE 1 (4 points)

Commun à tous les candidats

Pour chacune des questions, une seule des réponses **A**, **B**, **C** *ou* **D** *est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse inexacte enlève 0,25 point. L'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total des points est négatif, la note est ramenée à 0.*

1) A et B sont deux événements indépendants et on sait que $p(A) = 0,5$ et $p(B) = 0,2$.
La probabilité de l'événement $A \cup B$ est égale à :

Réponse **A** : 0,1
Réponse **B** : 0,6
Réponse **C** : 0,7
Réponse **D** : on ne peut pas savoir

2) Dans un magasin, un bac contient des cahiers soldés. On sait que 50 % des cahiers ont une reliure spirale et que 75 % des cahiers sont à grands carreaux. Parmi les cahiers à grands carreaux, 40 % ont une reliure spirale.
Adèle choisit au hasard un cahier à reliure spirale. La probabilité qu'il soit à grands carreaux est égale à :

Réponse **A** : 0,3
Réponse **B** : 0,5
Réponse **C** : 0,6
Réponse **D** : 0,75

Dans les questions **3)** et **4)**, on suppose que dans ce magasin, un autre bac contient une grande quantité de stylos-feutres en promotion. On sait que 25 % de ces stylos-feutres sont verts. Albert prélève au hasard et de manière indépendante 3 stylos-feutres.

3) La probabilité, arrondie à 10^{-3} près, qu'il prenne au moins un stylo-feutre vert est égale à :

Réponse **A** : 0,250
Réponse **B** : 0,422
Réponse **C** : 0,578
Réponse **D** : 0,984

4) La probabilité, arrondie à 10^{-3} près, qu'il prenne exactement 2 stylos-feutres verts est égale à :

Réponse **A** : 0,047
Réponse **B** : 0,063
Réponse **C** : 0,141
Réponse **D** : 0,500

EXERCICE 2 (5 points)

Commun à tous les candidats

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x + k\mathrm{e}^{ax}$ où k et a sont des nombres fixés. Sur la figure donnée en annexe, la courbe C représentant la fonction g et la droite D d'équation $y = x$ sont tracées dans un repère orthogonal (unités : 2 cm pour l'axe des abscisses, 1 cm pour l'axe des ordonnées). Le point E a pour coordonnées (0 ; 6) et le point F a pour coordonnées (3 ; 0). On précise que la droite (EF) est tangente à la courbe C au point E et la courbe C admet au point B une tangente horizontale.
On note g' la fonction dérivée de la fonction g.

1) a) Par lecture graphique, déterminer la valeur de $g(0)$.

b) Par lecture graphique, déterminer la valeur de $g'(0)$.

c) Exprimer $g'(x)$ en fonction de a et k.

d) En utilisant les résultats précédents, déterminer les valeurs de k et a. On justifiera les calculs.

Dans la suite de l'exercice, on prendra $g(x) = x + 6\mathrm{e}^{-0,5x}$.

2) Démontrer que la droite D est asymptote à la courbe C en $+\infty$.

3) On admet que la courbe C est située au dessus de la droite D. Soit S le domaine délimité par la courbe C, la droite D, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 4$.

a) Hachurer S sur le graphique.

b) Calculer, en cm², l'aire A du domaine S. Donner la valeur exacte, puis une valeur approchée à 0,1 cm² près.

4) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Déterminer la valeur exacte de l'abscisse du point B.

EXERCICE 3 (6 points)

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction f, définie sur l'intervalle]0 ; 20] par $f(x)=(3e^2-x)\ln x+10$.

1) a) Déterminer la limite de f en 0.
b) Calculer la valeur exacte de $f(e^2)$, puis une valeur approchée à 0,01 près.

2) Montrer que, pour tout x de]0 ; 20], $f'(x)=-\ln x+\dfrac{3e^2}{x}-1$ où f' désigne la dérivée de la fonction f.

3) On admet que la fonction dérivée f' est strictement décroissante sur]0 ; 20] et que son tableau de variations est le suivant :

x	0		e^2		20
$f'(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↘	$f'(20)$

a) À l'aide du tableau de variations, donner le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle]0 ; 20].
b) Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle]0 ; 20] et dresser son tableau de variations sur cet intervalle.

4) a) Montrer que, sur l'intervalle [0,6 ; 0,7], l'équation $f(x)=0$ possède une unique solution notée α. A la calculatrice, donner une valeur approchée de α à 0,001 près par excès.
b) Démontrer que $f(x)$ est négatif pour tout $x\in]0;\alpha[$ et que $f(x)$ est positif pour tout $x\in]\alpha;20]$.

Partie B

Une entreprise produit et vend chaque semaine x milliers de DVD, x appartenant à]0 ; 20].
Le bénéfice réalisé est égal à $f(x)$ milliers d'euros où f est la fonction étudiée dans la partie A.

En utilisant les résultats de la partie A :

1) déterminer le nombre minimal de DVD à fabriquer pour que le bénéfice soit positif ;

2) déterminer le nombre de DVD à produire pour que le bénéfice soit maximal ainsi que la valeur, à 10 euros près, de ce bénéfice maximal.

EXERCICE 4 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Deux chaînes de télévision A et B programment chaque semaine, à la même heure, deux émissions concurrentes. On suppose que le nombre global de téléspectateurs de ces émissions reste constant. La première semaine, 70 % de ces téléspectateurs ont regardé la chaîne A.

Une étude statistique montre que :
15 % des téléspectateurs qui ont regardé la chaîne A une semaine, regardent la chaîne B la semaine suivante.
10 % des téléspectateurs qui ont regardé la chaîne B une semaine, regardent la chaîne A la semaine suivante.

On note respectivement a_n et b_n les proportions de téléspectateurs des chaînes A et B la n-ième semaine et P_n la matrice ligne $\begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$. On a donc $P_1 = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}$.

1) a) Déterminer le graphe probabiliste représentant la situation.

b) Donner la matrice de transition M associée à ce graphe.

2) Calculer M^3 à l'aide de la calculatrice, donner les résultats en arrondissant à 10^{-3} près. Quelle est la répartition des téléspectateurs entre les deux chaînes lors de la quatrième semaine ?

3) On considère la matrice ligne $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$, où a et b sont deux réels tels que $a + b = 1$.

a) Déterminer a et b pour que $P = PM$.

b) Interpréter les deux valeurs trouvées.

4) On admet que pour tout entier naturel $n > 0$, on a : $a_n = 0,4 + 0,3 \times \left(0,75^{n-1}\right)$

a) Résoudre l'inéquation $a_n < 0,5$.

b) À partir de quelle semaine l'audience de l'émission de la chaîne B dépassera-t-elle celle de l'émission de la chaîne A ?