

Correction Bac ES – France – juin 2010

Exercice 1 (4 points) (Commun à tous les candidats)

Pour une meilleure compréhension, les réponses seront justifiées dans ce corrigé.

Question 1

Le nombre -3 est solution de l'équation : $\ln(e^x) = -3$

En effet, on sait que pour tout x réel, $\ln(e^x) = x$ et donc, $\ln(e^x) = -3 \Leftrightarrow x = -3$.

Question 2

La limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur l'intervalle $] \frac{1}{2} ; +\infty [$ par $f(x) = \frac{-2x^3 + 3x}{(2x - 1)^3}$ est $-\frac{1}{4}$

En effet, on sait que la limite en $+\infty$ d'une fonction rationnelle est égale à la limite du quotient de ses termes de plus haut degré.

$$\text{Ainsi, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^3}{(2x)^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$$

Question 3

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = 3\ln x - 2x + 5$.

Dans le plan muni d'un repère, la tangente à la courbe représentative de la fonction f en son point d'abscisse 1 admet pour équation : $y = x + 2$

En effet, cette tangente a pour équation : $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$

On a : $f(1) = 3\ln(1) - 2 \times 1 + 5 = 3$ et $f'(x) = 3 \times \frac{1}{x} - 2$ d'où, $f'(1) = 3 - 2 = 1$.

Ainsi, la tangente a pour équation : $y = 1(x - 1) + 3$ soit, $y = x + 2$.

Question 4

Un jeu consiste à lancer une fois un dé cubique non pipé dont les faces sont numérotées de 1 à 6. **Un joueur donne 3 euros** pour participer à ce jeu.

Il lance le dé et on lit le numéro inscrit sur la face supérieure de ce dé :

- si le numéro est 1, le joueur reçoit 10 euros,
- si le numéro est 2 ou 4, il reçoit 1 euro,
- sinon, il ne reçoit rien.

À ce jeu, l'espérance mathématique du gain algébrique, exprimée en euros, est : -1

En effet, le gain suit la loi de probabilité suivante :

Gain	7	-2	-3
Probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$

$$\text{Son espérance est : } 7 \times \frac{1}{6} + (-2) \times \frac{2}{6} + (-3) \times \frac{3}{6} = -1$$

Exercice 2 (5 points) (Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

- 1) Comme : 25 % des employés ont un ordinateur Aliet, on a : $p(A) = 0,25$.
40 % des employés ont un ordinateur Balart, on a : $p(B) = 0,4$.

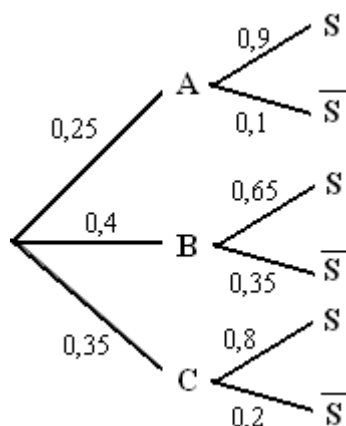
Comme le reste des employés a un ordinateur Celt, les événements A, B et C forment une partition et ainsi, $p(A) + p(B) + p(C) = 1$ d'où, $p(C) = 1 - 0,25 - 0,4 = 0,35$.

Parmi les employés équipés d'un ordinateur Aliet, 90 % sont satisfaits du service de maintenance donc, $p_A(S) = 0,9$.

Parmi les employés équipés d'un ordinateur Balart, 65 % sont satisfaits du service de maintenance donc, $p_B(S) = 0,65$

Parmi les employés équipés d'un ordinateur Celt, 80 % sont satisfaits du service de maintenance donc, $p_C(S) = 0,8$.

On a donc l'arbre pondéré suivant :



- 2) On a : $p(A \cap S) = p(A) \times p_A(S) = 0,25 \times 0,9 = 0,225$.

Donc, la probabilité que la fiche choisie soit celle d'un employé équipé d'un ordinateur Aliet et satisfait du service de maintenance est de **0,225**.

- 3) Comme les événements A, B et C forment une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$p(S) = p(A \cap S) + p(B \cap S) + p(C \cap S)$$

$$p(S) = 0,225 + 0,4 \times 0,65 + 0,35 \times 0,8$$

$$p(S) = 0,765.$$

- 4) On a : $p_S(C) = \frac{p(S \cap C)}{p(S)} = \frac{0,35 \times 0,8}{0,765} = 0,366$ à 10^{-3} près.

Donc, sachant que la fiche choisie est celle d'un employé satisfait du service de maintenance, la probabilité que cet employé soit équipé d'un ordinateur de la marque Celt est égale à **0,336**.

Exercice 2 (5 points) (Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

Soit x le nombre, exprimé **en centaines**, de sièges « luxe » et y le nombre, exprimé **en centaines**, de sièges « confort » produits chaque mois.

La fonction coût mensuel de production est la fonction F définie pour x et y appartenant à l'intervalle $[0 ; 3]$ par :

$$F(x, y) = x^2 - 2x + y^2 - 4y + 6.$$

$F(x, y)$ désigne le coût mensuel de production, exprimé **en dizaine de milliers d'euros**, pour x **centaines** de sièges « luxe » et pour y **centaines** de sièges « confort ».

1) $F(1,2 ; 1,6) = 1,2^2 - 2 \times 1,2 + 1,6^2 - 4 \times 1,6 + 6 = 1,2$.

Donc, en janvier 2010, le coût de production a été de 1,2 dizaine de milliers d'euros soit de 12 000 €.

2) Pour tout x et y réels, on a : $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + 1 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + 1$
Soit, $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + 1 = x^2 - 2x + y^2 - 4y + 6$.

De ce qui précède, on déduit que : $F(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + 1$.

Comme un carré est toujours positif, le coût de production sera minimal quand les carrés seront nuls, c'est-à-dire quand $x = 1$ et $y = 2$ et $F(1 ; 2) = 1$.

Ainsi, le coût de production mensuel est de 10 000 euros et il est atteint pour une production de 100 sièges « luxe » et 200 sièges « confort ».

3) À partir du mois de juillet 2010, la production mensuelle prévue de sièges est exactement 250.

a. La production mensuelle est de $x + y$ centaines de sièges. Or, $250 = 2,5$ centaines.
Donc, on a : $x + y = 2,5$ soit, $y = 2,5 - x$.

Ainsi, le coût peut s'écrire : $F(x ; y) = x^2 - 2x + (2,5 - x)^2 - 4(2,5 - x) + 6$
 $F(x ; y) = x^2 - 2x + 6,25 - 5x + x^2 - 10 + 4x + 6$
 $F(x ; y) = 2x^2 - 3x + 2,25$.

b. On note f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 2,5]$ par $f(x) = 2x^2 - 3x + 2,25$.

La fonction f est une fonction trinôme dont la parabole est « tournée vers le haut » car $a = 2 > 0$ et elle change de variation en $x = -\frac{b}{2a} = \frac{3}{4} = 0,75$.

On a donc le tableau de variation suivant :

x	0	0,75	2,5
f	2,25	1,125	7,25

c. La fonction f atteint son minimum 1,125 pour $x = 0,75$ et $y = 2,5 - x = 1,75$.

Donc, en juillet 2010, l'équipementier doit produire 75 sièges « luxe » et 175 sièges « confort » pour un coût de production minimal égal à 11 250 €.

Exercice 3 (5 points) (Commun à tous les candidats)

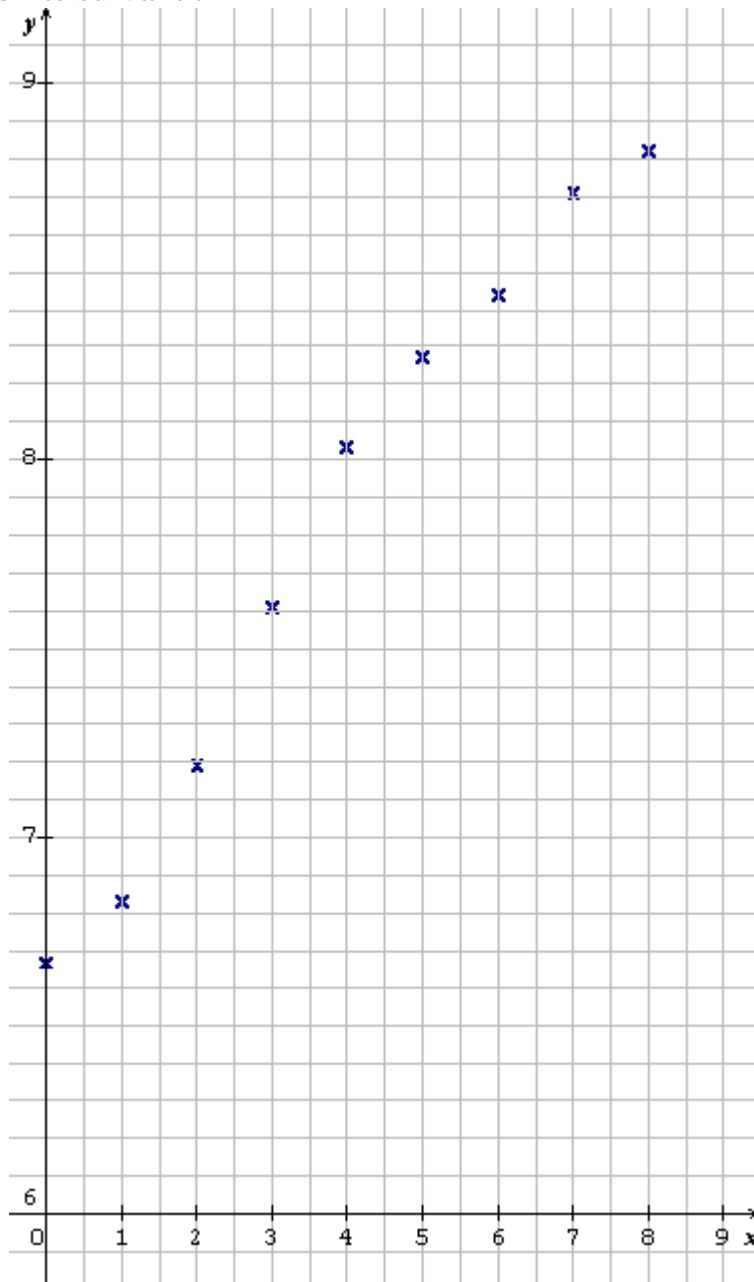
Pour i nombre entier variant de 0 à 8, on définit le tableau suivant qui donne les valeurs du SMIC horaire brut, exprimé en euros, de 2001 à 2009 (source INSEE).

On se propose d'en étudier l'évolution :

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
SMIC horaire brut (en euros), y_i	6,67	6,83	7,19	7,61	8,03	8,27	8,44	8,71	8,82

Partie A : Observation des données

1) On a le nuage de points suivant :



2) On a : $\frac{8,82 - 6,67}{6,67} \times 100 = 32,23$ à 10^{-2} près.

Ainsi, la valeur du SMIC horaire brut a augmenté de 32,23 % entre 2001 et 2009.

- 3) Soit x le coefficient multiplicateur associé au taux annuel moyen d'augmentation entre 2001 et 2005.

Alors, le coefficient multiplicateur global est : $x^4 = \frac{8,03}{6,67}$

Ainsi, $x = \sqrt[4]{\frac{8,03}{6,67}} = 1,0475$ à 10^{-4} près.

Donc, le pourcentage annuel moyen d'augmentation de la valeur du SMIC horaire brut entre 2001 et 2005 est bien de 4,75 %.

Partie B : Modélisation de la série statistique $(x_i; y_i)_{4 \leq i \leq 8}$ par un ajustement exponentiel

En observant le pourcentage annuel moyen d'augmentation de la valeur du SMIC horaire brut entre 2005 et 2009, on estime à $8,03 \times 1,024^n$ la valeur, exprimée en euros, du SMIC horaire brut pour l'année $2005+n$, n désignant un entier naturel.

On considère que ce nouveau modèle reste valable jusqu'à l'année 2016.

- 1) $2012 = 2005 + 7$ et $8,03 \times 1,024^7 = 9,48$ à 10^{-2} près.

Donc, si ce modèle reste valable, en 2016, le SMIC horaire brut serait de 9,48 €.

- 2) On cherche n tel que $8,03 \times 1,024^n \geq 10$.

$$8,03 \times 1,024^n \geq 10 \quad \Leftrightarrow 1,024^n \geq \frac{10}{8,03}$$

$$\Leftrightarrow \ln(1,024^n) \geq \ln\left(\frac{10}{8,03}\right) \quad \text{car la fonction } \ln \text{ est croissante.}$$

$$\Leftrightarrow n \ln(1,024) \geq \ln\left(\frac{10}{8,03}\right)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln\left(\frac{10}{8,03}\right)}{\ln(1,024)} \quad \text{car } \ln(1,024) > 0.$$

$$\text{Or, } \frac{\ln\left(\frac{10}{8,03}\right)}{\ln(1,024)} \approx 9,25$$

C'est donc à partir de l'année 2015, $2005 + 10$, que la valeur du SMIC horaire brut dépassera 10 euros.

Exercice 4 (6 points) (*Commun à tous les candidats*)

Un nouveau modèle de mini-ordinateur portable est mis sur le marché.

Soit x la quantité d'appareils pouvant être vendus, exprimée **en milliers**.

La fonction d'offre de cet appareil est la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 35]$ par :

$$f(x) = 153 e^{0,05x}.$$

Le nombre réel $f(x)$ désigne le prix unitaire en euros d'un appareil, proposé par les fournisseurs, en fonction de la quantité x , exprimée en milliers, d'appareils pouvant être vendus.

La fonction de demande de cet appareil est la fonction g définie sur l'intervalle $[0 ; 35]$ par :

$$g(x) = -116 \ln(x + 1) + 504.$$

Le nombre réel $g(x)$ désigne le prix unitaire en euros d'un appareil, accepté par les consommateurs, en fonction de la quantité x , exprimée en milliers, d'appareils disponibles.

1) a. On a : $f'(x) = 153 \times 0,05 e^{0,05x}$.

Comme pour tout x réel, $e^{0,05x} > 0$, $f'(x) > 0$ (produit de nombres positifs).

Ainsi, la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; 35]$.

b. On a : $g'(x) = -116 \times \frac{1}{x+1}$

Comme pour tout réel $x \in [0 ; 35]$, $x + 1 > 0$, $g'(x) < 0$.

Ainsi, la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $[0 ; 35]$.

c. Le point E semble avoir pour coordonnées $(8,9 ; 240)$.

2) Afin de déterminer les coordonnées du point E de façon précise, on est amené à résoudre dans l'intervalle $[0 ; 35]$ l'équation $f(x) = g(x)$.

Pour cela on considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0 ; 35]$ par $h(x) = f(x) - g(x)$.

a. On a : $h'(x) = f'(x) - g'(x) = f'(x) + (-g'(x))$.

Pour tout $x \in [0 ; 35]$, on a : $g'(x) < 0$ donc, $-g'(x) > 0$ et on a : $f'(x) > 0$ donc, par somme de nombres positifs, $h'(x) > 0$ pour $x \in [0 ; 35]$.

Ainsi, la fonction h est strictement croissante sur $[0 ; 35]$.

b. La fonction h est continue et strictement croissante sur $[0 ; 35]$.

De plus, $h(0) = 153 - 504 < 0$ et $h(35) \approx 792 > 0$.

Donc, d'après le théorème de la bijection, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution x_0 sur l'intervalle $[0 ; 35]$.

c. À l'aide de la calculatrice, on trouve : $x_0 \approx 8,871$.

d. $y_0 = f(x_0) = f(8,871) \approx 238,41$.

e. De la question précédente, on déduit que le prix unitaire d'équilibre de cet appareil est de 238,41 € et pour ce prix, 8 871 appareils sont disponibles.

3) On prendra dans cette question $x_0 = 8,871$ et $y_0 = 238,41$.

a. $f(x) = 153e^{0,05x}$ donc, une primitive est : $F(x) = 153 \times \frac{1}{0,05} e^{0,05x} = 3\,060 e^{0,05x}$.

b. On appelle surplus des fournisseurs le nombre réel S défini par la formule :

$$S = x_0 \times y_0 - \int_0^{x_0} f(x) dx.$$

Voir le graphique pour le domaine du plan dont l'aire, en u.a. est le nombre réel S .

$$\text{On a : } \int_0^{x_0} f(x) dx = F(x_0) - F(0) = 3\,060 e^{0,05 x_0} - 3\,060$$

$$\text{D'où, } S = 8,871 \times 238,41 + 3\,060 - 3\,060 e^{0,05 x_0} \approx 406,754.$$

