BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2010

MATHÉMATIQUES

Série : **ES**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures.** – COEFFICIENT : 7

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter tous les exercices.
Il est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (*3 points*)

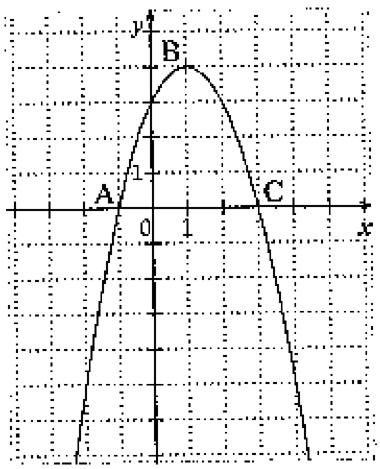
Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Pour chacune des questions suivantes, trois réponses sont proposées, une seule réponse est exacte. Indiquer sur votre copie le numéro de la question et recopier la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

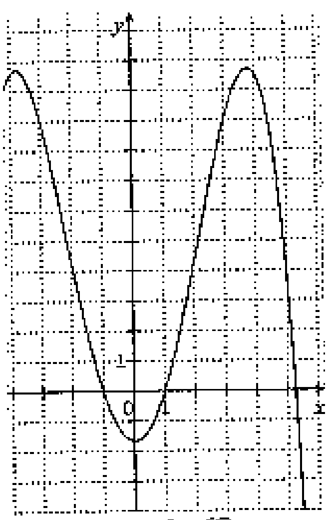
Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fausse enlève 0,5 point, l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Si le total des points est négatif, il est ramené à zéro.

1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-4 ; 6]$, dont la courbe est représentée sur la figure ci-dessous dans un repère orthonormé.

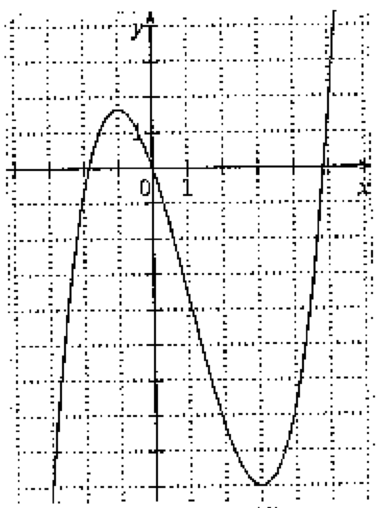
   Les points A $(-1 ; 0)$, B $(1 ; 4)$ et C $(3 ; 0)$ appartiennent à la représentation graphique de f.



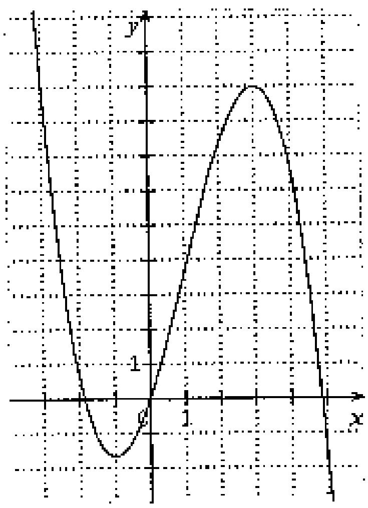
Parmi les trois courbes suivantes, laquelle est la représentation graphique d'une primitive de la fonction f ?



Courbe $\mathscr{C}_1$



Courbe $\mathscr{C}_2$



Courbe $\mathscr{C}_3$

2. Une primitive de la fonction g définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbf{R}$ par $g(x) = xe^x$ est la fonction G définie sur $\mathbf{R}$ par :

- $G(x) = \dfrac{x^2}{2}e^x$ • $G(x) = (x+1)e^x$ • $G(x) = (x-1)e^x$

3. La fonction h définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbf{R}$ par $h(x) = 0{,}8^x$ est égale à la fonction k définie sur $\mathbf{R}$ par :

- $k(x) = e^{x\ln(0{,}8)}$ • $k(x) = e^{0{,}8\ln(x)}$ • $k(x) = 0{,}8\,e^x$

Exercice 2 (*5 points*)

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

Dans une société, le service informatique utilise deux logiciels de gestion : d'une part, le logiciel Aurora, leader du marché, et d'autre part le logiciel Bestmath, son concurrent. Le chef de réseau informatique enregistre chaque année, en janvier et en juillet, le nombre d'utilisateurs des deux logiciels et fournit des rapports réguliers sur le comportement des utilisateurs.

Lors de l'enquête de janvier 2009, le chef de réseau a constaté que 32% des informaticiens utilisait le logiciel Aurora, les autres informaticiens utilisaient le logiciel Bestmath.

Lors de chaque relevé suivant (juillet 2009, janvier 2010,...), le chef du réseau informatique a constaté que 20% des utilisateurs du logiciel Aurora avaient changé de logiciel et utilisaient désormais le logiciel Bestmath, tandis que 25% des utilisateurs du logiciel Bestmath avaient changé de logiciel et utilisaient désormais Aurora.

Les semestres sont comptés à partir de janvier 2009, que l'on appellera semestre 0 (juillet 2009 est donc le semestre 1).

Pour tout entier naturel n, on désigne par :

- a_n la probabilité qu'un informaticien pris au hasard utilise le logiciel Aurora le semestre n ;
- b_n la probabilité qu'un informaticien pris au hasard utilise le logiciel Bestmath le semestre n ;

1.
   a. Traduire les données l'énoncé par un graphe probabiliste.

   b. Ecrire la matrice de transition M associée à ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.

2.
   a. On note $P_0 = (a_0 \quad b_0)$ l'état initial de ce graphe en janvier 2009. Déterminer P_0.

   b. On appelle P_1 l'état de la société en juillet 2009. Vérifier que $P_1 = (0,426 \quad 0,574)$.

   c. On appelle P_2 l'état en janvier 2010. Déterminer P_2 (les résultats seront arrondis à 10^{-3}).

3. Dans cette partie on étudie la suite (a_n).

   a. Démontrer que pour tout entier naturel n on a : $a_{n+1} = 0,55a_n + 0,25$.

   b. On considère la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n par : $U_n = \dfrac{5}{9} - a_n$.

   Démontrer que la suite (U_n) est géométrique, déterminer sa raison ainsi que le premier terme.

   c. En déduire l'expression de U_n puis de a_n en fonction de n.

4. Soit $P = (x \quad y)$ l'état probabiliste stable.

   a. Déterminer x et y.

   b. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   On suppose que l'utilisation du logiciel Aurora dans l'entreprise progresse régulièrement de la même façon. Le distributeur du logiciel Aurora peut-il espérer que son logiciel soit utilisé un jour par plus de 60 % des informaticiens de l'entreprise ?

Exercice 3 *(5 points)*

Commun à tous les candidats

Dans le cadre de son action en faveur du développement durable, le Conseil Régional de d'une région A de France métropolitaine rassemble et analyse des données sur la circulation des déchets valorisables par le recyclage. Depuis 2000, le Ministère de l'Environnement fournit des données statistiques sur les quantités de déchets exportés de la région A en vue de leur valorisation.

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Rang de l'année x_i $1 \leqslant i \leqslant 7$	1	2	3	4	5	6	7
Déchets exportés y_i (en tonnes) $1 \leqslant i \leqslant 7$	797	816	1140	1921	2199	3165	4195

Source : Ministère de l'Environnement (MEEDDAT)

1. Sur la feuille de papier millimétré jointe, représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\,;\,y_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant 7)$, le plan étant rapporté à un repère orthogonal d'unités graphiques : 2cm pour une année sur l'axe des abscisses, 1cm pour 200 tonnes sur l'axe des ordonnées.

2. On considère qu'un ajustement exponentiel est adapté à l'analyse. Pour $1 \leqslant i \leqslant 7$, on pose alors $z_i = \ln y_i$.

   a. Recopier sur votre copie le tableau ci-dessous et le compléter avec les valeurs de z_i arrondies au centième :

Rang x_i de l'année $1 \leqslant i \leqslant 7$	1	2	3	4	5	6	7
$z_i = \ln y_i$ $1 \leqslant i \leqslant 7$							

   b. À l'aide de la calculatrice, et en utilisant les données du tableau ci-dessus, donner une équation de la droite d'ajustement de z en x par la méthode des moindres carrés, sous la forme $z = ax + b$ (les coefficients seront arrondis au millième).

   c. En déduire une approximation de la quantité de déchets exportés y, exprimée en tonnes, en fonction du rang de l'année x sous la forme

$$y = \alpha e^{\beta x}$$

   où le coefficient α est arrondi à l'unité et le coefficient β est arrondi au centième.

3. Selon cet ajustement, quelle quantité de déchets, arrondie à une centaine de tonnes, peut être exportée de la région A en vue d'une valorisation à l'horizon 2011 ?

Exercice 4 (*7 points*)

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 10]$ par

$$f(x) = -0{,}25\,x^2 + 2\,x + 3\,\ln(x+1) - 1{,}75 - 3\ln 2.$$

1. Calculer $f(0)$ et $f(1)$.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur $[0 ; 10]$; on note f' sa fonction dérivée sur cet intervalle.
   Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 10]$,
   $$f'(x) = \frac{-0{,}5(x+2)(x-5)}{x+1}.$$
3.
   a. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0 ; 10]$.
   b. Déterminer les variations de la fonction f sur $[0 ; 10]$.
   c. Calculer la valeur exacte puis la valeur décimale arrondie au dixième du maximum de la fonction f sur $[0 ; 10]$.

4.
   a. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle $[5 ; 10]$ une solution unique x_0.
   b. Donner, à l'aide de la calculatrice, la valeur approchée par défaut à 10^{-1} de x_0.

5. On admet qu'une primitive de la fonction f sur $[0 ; 10]$ est la fonction F définie par :
   $$F(x) = \frac{-1}{12}x^3 + x^2 - (4{,}75 + 3\ln 2)x + 3(x+1)\ln(x+1)$$
   Montrer que la valeur décimale arrondie au dixième de $\frac{1}{10}\int_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x$ est 2,8.

Partie B

À l'approche des fêtes de fin d'année, un supermarché souhaite commercialiser des guirlandes de Noël.

On note x le nombre de guirlandes qu'il souhaite vendre (en milliers de guirlandes). On suppose que x est un réel compris entre 0 et 10.

Le bénéfice réalisé pour la vente de x milliers de guirlandes, exprimé en milliers d'euros, est donné par la fonction f définie sur $[0 ; 10]$ par :

$$f(x) = -0{,}25\,x^2 + 2\,x + 3\,\ln(x+1) - 1{,}75 - 3\ln 2.$$

Déduire de la **partie A** les réponses aux questions suivantes (les réponses seront données à la centaine de guirlandes vendues près). On explicitera la méthode utilisée.

1. Combien de guirlandes le supermarché doit-il vendre pour réaliser un bénéfice sur ce produit ?
2. Combien de guirlandes le supermarché doit-il vendre pour réaliser un bénéfice maximal ? Quel est alors ce bénéfice maximal ? (à 100 euros près).
3. Quel bénéfice moyen peut espérer le supermarché en vendant entre 0 et 10000 guirlandes?