∾ Baccalauréat L spécialité Antilles–Guyane ∾
16 juin 2010

L'usage d'une calculatrice est autorisé 3 heures

Ce sujet nécessite une feuille de papier millimétré

EXERCICE 1 **6 points**

Une urne A contient 100 boules indiscernables au toucher : 90 rouges et 10 noires.
Une urne B contient également 100 boules indiscernables au toucher : 30 rouges et 70 noires.

On réalise l'expérience suivante :
On lance un dé cubique équilibré, dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

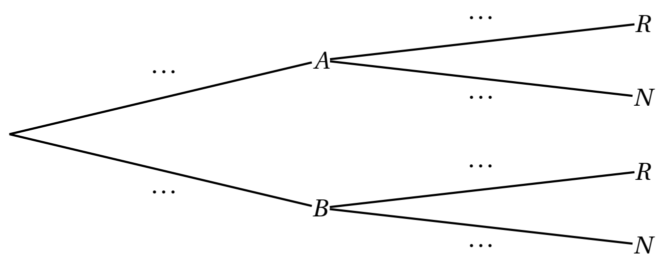
- si le numéro affiché par le dé est 1, on tire une boule dans l'urne A et on note sa couleur.
- Sinon, on tire une boule dans l'urne B et on note sa couleur.

On note :

- A l'évènement « tirer une boule dans l'urne A » ;
- B l'évènement « tirer une boule dans l'urne B » ;
- R l'évènement « tirer une boule rouge » ;
- N l'évènement « tirer une boule noire ».

1. Donner la probabilité $p(A)$ de l'évènement A.

2. Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous.



3. Décrire l'évènement $A \cap R$ et calculer sa probabilité.

4. Montrer que $p(R) = 0,40$.

5. **a.** Sachant que la boule obtenue après tirage est rouge, calculer la probabilité qu'elle provienne de l'urne A.

b. Les évènements A et R sont-ils indépendants ?

6. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

On désire maintenant modifier la composition de l'urne B pour que, lorsqu'on réalise l'expérience décrite ci-dessus, on ait autant de chances d'obtenir une boule rouge qu'une boule noire.

Proposer une composition de l'urne B qui convient. Expliquer la démarche de recherche.

EXERCICE 2 **4 points**

Soit (u_n) la suite définie pour tout nombre entier naturel n par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & 0,9u_n + 90 \\ u_0 & = & 1\,000. \end{array}\right.$$

1. Calculer u_1 et u_2.

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout nombre entier naturel n par :

$$v_n = u_n - 900.$$

  a. Calculer v_0 et v_1.

  b. Montrer que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 0{,}9v_n$.

  c. Quelle est la nature de la suite (v_n) ? Écrire v_n en fonction de n.

3. En déduire que pour tout nombre entier n, $u_n = 100 \times (0{,}9)^n + 900$.

4. Quelle est la limite de u_n lorsque n tend vers l'infini ?

5. À partir de quel nombre entier n a-t-on $u_n \leqslant 901$?

EXERCICE 3 — 6 points

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I = [1~;~7]$ par

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - 6x + 4 + 8\ln(x).$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Compléter le tableau de valeurs donné dans **l'annexe 1**. On donnera des valeurs approchées à 10^{-1} près.

2. **a.** On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$, pour x dans l'intervalle I.

  b. Montrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle I, $f'(x) = \dfrac{(x-2)(x-4)}{x}$.

  c. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle I, puis dresser le tableau de variations de f.

3. Montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet deux tangentes parallèles à l'axe des abscisses.

4. **a.** Dans le repère fourni dans l'annexe 1, construire la courbe $\mathcal{C}_f$ et ses deux tangentes parallèles à l'axe des abscisses.

  b. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle I.

EXERCICE 4 — 4 points

La *figure 1* représente le dessin en perspective cavalière d'un banc, dont l'assise rectangulaire $ABCD$ est composée de deux carrés de même taille : $AIJD$ et $BCJI$. Le point K désigne le centre du rectangle $ABCD$. Les quatre pieds $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$ et $[DH]$ du banc ont tous la même longueur.

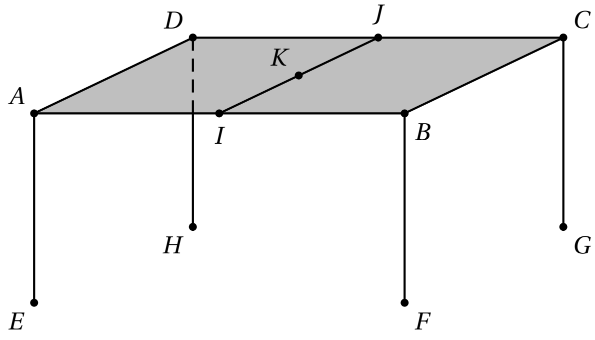


Figure 1

Dans toutes les constructions, laisser apparents les traits de construction. Repasser en gras la figure du banc.

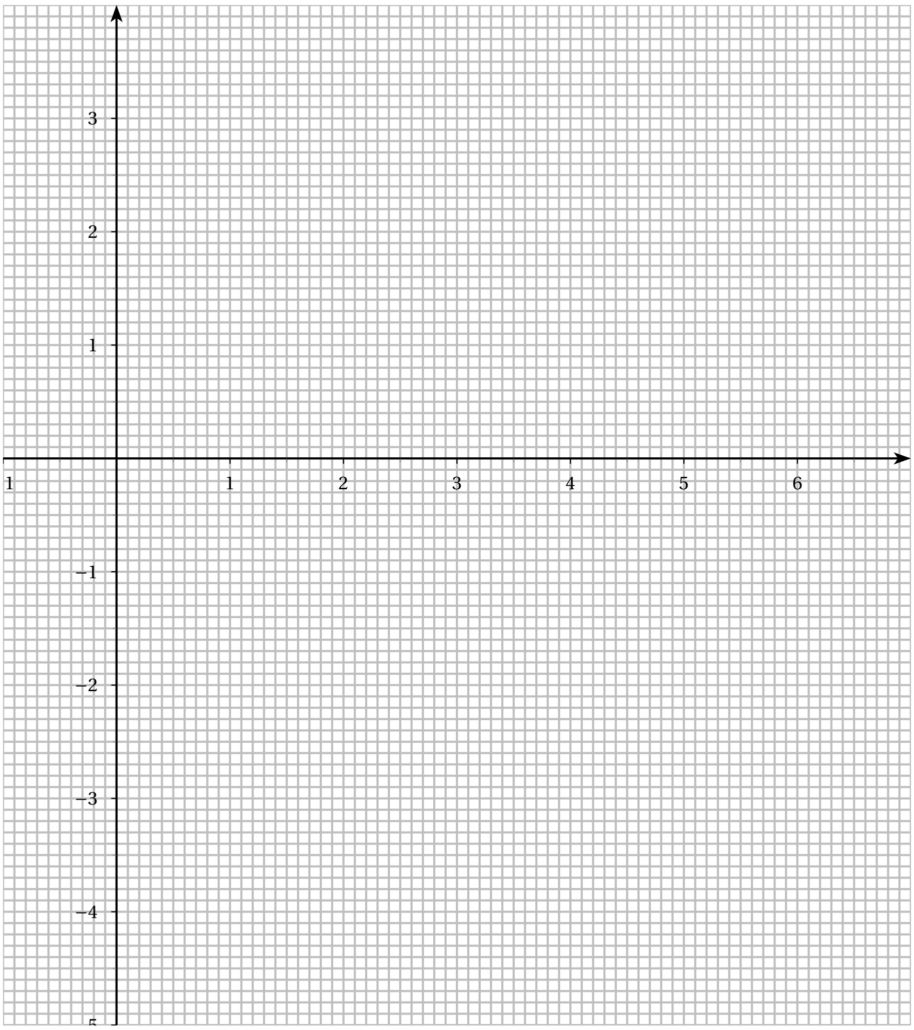
Les images de A, B, C, ... dans les représentations en perspective centrale sont notées avec des lettres minuscules : a, b, c, ...
$\mathcal{H}$ désigne la ligne d'horizon.

Les points I, B et F sont situés dans un plan frontal.
La *figure 2* de **l'annexe 2** représente le début du dessin de ce même banc dans une perspective centrale. Le point d_1 est l'un des points de distance de la perspective.

1. Construire le point de fuite principal. On le notera w.
2. Construire d_2, le deuxième point de distance et justifier la construction par une propriété des points de distance.
3. Construire l'image $abcd$ de l'assise $ABCD$ du banc.
4. Construire l'image k du point K puis terminer la construction de la représentation du banc.

ANNEXE 1 (à rendre avec la copie)

x	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$ (à 10^{-1} près)			$-0,7$		$-0,6$	$0,3$	



ANNEXE 2 (à rendre avec la copie)

Figure 2