La Réunion 2010 — BAC S — Corrigé maths

J.-P. W.

1$^{\text{er}}$ juillet 2010

Exercice 1 (commun) 6 points

Partie A

1) **a)** Sur $]-1;+\infty[$, la fonction affine $(x \longmapsto x+1)$ est strictement croissante et est à valeurs dans $]0;+\infty[$, intervalle sur lequel la fonction ln est strictement croissante, alors (par composition, puis somme avec la constante 1)

$$f \text{ est strictement croissante sur }]-1;+\infty[.$$

b) • Limite en -1

$\lim\limits_{x\to-1}(x+1)=0$ et $\lim\limits_{X\to 0}\ln(X)=-\infty$, par composition et somme avec 1 :

$$\lim_{x\to-1} f(x)=-\infty$$

• Limite en $+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\ln(X)=+\infty$, alors (composition et somme avec 1)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

2) **a)** $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-1} -x=1$, alors (par somme)

$$\lim_{x\to-1} g(x)=-\infty$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x) = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{\ln(X)}{X} = 0$ (croissance comparée), alors (par composition)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{1+x} = 0$$

$$\forall x > -1,\ \ g(x) = (1+x)\underbrace{\left(\underbrace{\frac{1}{1+x}+\frac{\ln(1+x)}{1+x}}_{\to 0 \text{ en } +\infty}-\frac{x}{1+x}\right)}_{\to -1 \text{ en } +\infty}$$

Par conséquent,

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} -(1+x) = -\infty$$

c) g est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et,

$$\forall x > -1,\ \ g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}$$

Puisque $x > -1$, $1+x > 0$ et

- sur $]-1;0[$, $-x > 0$, alors $g'(x) > 0$:
  la fonction g est strictement croissante sur $]-1;0]$;
- sur $]0;+\infty[$, $-x < 0$, alors $g'(x) < 0$:
  la fonction g est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$	||	$+$	0	$-$	
g	||	$-\infty$ ↗	1	↘	$-\infty$

d) g est continue (car dérivable) sur $]-1;0]$ et $0 \in \left]\lim\limits_{x\to-1} g(x); g(0)\right]$

alors (théorème des valeurs intermédiaires) l'équation $g(x) = 0$ possède au moins une solution dans $]-1;0]$, g étant de plus strictement monotone (croissante) sur $]-1;0]$ cette solution est unique. On la note α et $\alpha \in]-1;0]$.

De même,

g continue, strictement monotone (décroissante) sur $[0;+\infty[$ et $0 \in \left]\lim\limits_{x\to+\infty} g(x); g(0)\right]$, alors l'équation $g(x) = 0$ a une, et une seule solution β dans $[0;+\infty[$ et, puisque $g(2) > 0$ et $0 > g(3)$, $\beta \in [2;3]$.

e) De **c)** et **d)** on déduit le signe de $g(x)$

x	-1		α		β		$+\infty$
signe de $g(x)$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	

Le signe de $g(x) = f(x) - x$ indique la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à D :

- $\mathscr{C}_f$ est au-dessous de D sur $]-1;\alpha[$ et sur $]\beta;+\infty[$;
- $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de D sur $]\alpha;\beta[$.

Partie B

1) On considère la proposition dépendant de l'entier naturel n,

$$\mathscr{P}(n)\ :\ \text{« } 2 \leqslant u_n \leqslant \beta \text{ »}$$

On raisonne par récurrence :

Initialisation $\mathscr{P}(0)$: « $2 \leqslant u_0 \leqslant \beta$ » est vraie car $u_0 = 2$.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$.

On suppose que $\mathscr{P}(n)$: « $2 \leqslant u_n \leqslant \beta$ » est vraie. (H.R.)

Démontrons qu'alors $\mathscr{P}(n+1)$: « $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant \beta$ » est vraie.

Puisque, **Partie A, question 1) a)**, f est croissante sur $]-1;+\infty[$:

Si $2 \leqslant u_n \leqslant \beta$ alors $f(2) \leqslant f(u_n) \leqslant f(\beta)$

alors $1 + \ln(3) \leqslant u_{n+1} \leqslant f(\beta)$

comme $2 < 1 + \ln(3)$ et $g(\beta) = f(\beta) - \beta = 0$, on a $f(\beta) = \beta$,

alors $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant \beta$

Conclusion $\forall n \in \mathbb{N},\ 2 \leqslant u_n \leqslant \beta$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n)$.

Puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [2;\beta]$ et g positive sur $[2;\beta]$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \geqslant 0$$

La suite (u_n) est croissante et majorée alors elle converge.

Exercice 2 (commun) — 4 points

Partie I

1) Le dé est équilibré et possède deux faces noires sur 6, la probabilité d'obtenir une face noire lors d'un lancer est $\dfrac{1}{3}$.

Les deux lancers sont indépendants, alors la probabilité d'obtenir deux faces noires à l'issue du jeu est

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

2) L'événement C est la réunion des événements, deux à deux incompatibles : « les deux faces sont noires », « les deux faces sont vertes », « les deux faces sont rouges », alors

$$P(C) = \frac{1}{9} + \frac{1}{36} + \frac{1}{4} = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$$

3) « les deux faces sont de couleurs différentes » est l'événement contraire de C, alors sa probabilité est

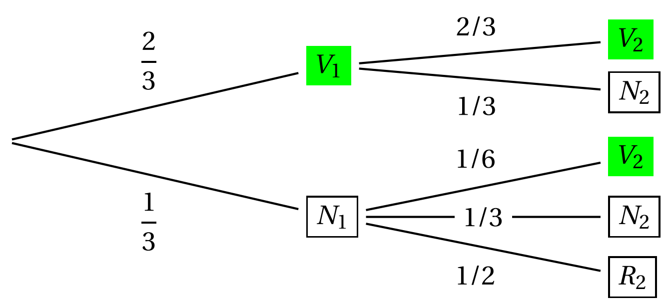
$$P\left(\overline{C}\right) = 1 - P(C) = 1 - \frac{7}{18} = \frac{11}{18}$$

4) Considérons l'événement V : « les deux faces sont vertes », on a $V \subset C$ donc $V \cap C = V$. Alors

$$P_C(V) = \frac{P(V \cap C)}{P(C)} = \frac{P(V)}{P(C)} = \frac{1}{36} \times \frac{18}{7} = \frac{1}{14}$$

Partie II

1) **a)** Considérons les événements V_1 : « la face obtenue au premier lancer est verte », V_2 : « la face obtenue au second lancer est verte », ...



b) Sachant que l'on a obtenu une face verte au premier lancer, on lance le dé B au deuxième lancer et la probabilité d'obtenir alors une face verte est :

$$P_{V_1}(V_2) = \frac{2}{3}$$

2) La probabilité d'obtenir deux faces vertes :

$$P(V_1 \cap V_2) = P(V_1) \times P_{V_1}(V_2) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

3) D'après la formule des probabilités totales :

$$P(V_2) = P(V_1 \cap V_2) + P(N_1 \cap V_2) = \frac{4}{9} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \cdots = \frac{1}{2}$$

Exercice 3 (commun) 5 points

Partie A

1) Soit f une fonction définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ alors la fonction

$$g\ :\ x \longmapsto g(x) = \frac{f(x)}{x}$$

— quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0;+\infty[$ — est dérivable sur $]0;+\infty[$,

$$\forall x \in]0;+\infty[,\ \ f(x) = xg(x) \quad \text{et} \quad f'(x) = g(x) + xg'(x)$$

Si f vérifie la condition (E), alors

$$\forall x > 0,\ \ xf'(x) - f(x) = x^2\mathrm{e}^{2x} \quad (E)$$

alors

$$\forall x > 0,\ \ x\big(g(x) + xg'(x)\big) - xg(x) = x^2g'(x) = x^2\mathrm{e}^{2x}$$

alors (puisque $\forall x > 0,\ x^2 \neq 0$)

$$\forall x > 0,\ \ g'(x) = \mathrm{e}^{2x}$$

2) D'après la question précédente, si f vérifie la condition (E), alors g est une primitive sur $]0;+\infty[$ de $\big(x \longmapsto \mathrm{e}^{2x}\big)$, alors

$$\begin{array}{llcl} g & : &]0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & g(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + k \quad \text{où } k \in \mathbb{R} \end{array}$$

Alors

$$\begin{array}{llcl} f & : &]0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & f(x) = xg(x) = \dfrac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x} + kx \quad \text{où } k \in \mathbb{R} \end{array}$$

Réciproquement, on doit s'assurer par le calcul que toute fonction f de la forme ci-dessus est définie, dérivable sur $]0;+\infty[$ et vérifie la condition (E).

3) f est une fonction de la forme précédente telle que $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ si, et seulement si, $\frac{1}{4}\text{e} + \frac{1}{2}k = 0$ c'est-à-dire $k = -\frac{\text{e}}{2}$.

$$\forall x > 0,\ f(x) = \frac{1}{2}x\left(\text{e}^{2x} - \text{e}\right)$$

Partie B

1) $\forall x \in [0;+\infty[,\ h(x) = \frac{1}{2}x\left(\text{e}^{2x} - \text{e}\right)$

alors, pour $x > 0$, $h(x)$ est du signe de $\text{e}^{2x} - \text{e}^1$

alors, par stricte croissance de la fonction exp sur $[0;+\infty[$,

$$\text{e}^{2x} > \text{e}^1 \iff 2x > 1 \iff x > \frac{1}{2}$$

On en déduit le tableau de signe de $h(x)$

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
signe de x	0	$+$	|	$+$	
signe de $\text{e}^{2x} - \text{e}$	||	$-$	0	$+$	
signe de $h(x)$	0	$-$	0	$+$	

2) **a)** Pour tout $x \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$, on pose $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \text{e}^{2x} \end{cases}$ et $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \frac{1}{2}\text{e}^{2x} \end{cases}$

les fonctions u, v, u' et v' sont continues sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$, on peut alors effectuer une intégration par parties selon la formule :

$$\int_a^b u(x)v'(x)\text{d}x = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\text{d}x$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}} x\text{e}^{2x}\text{d}x &= \left[\frac{1}{2}x\text{e}^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}\text{e}^{2x}\text{d}x \\
&= \frac{1}{4}\text{e} - \left[\frac{1}{4}\text{e}^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{4}\text{e} - \frac{1}{4}\text{e} + \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Alors, par linéarité de l'intégrale

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} h(x)\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} x\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x - \frac{\mathrm{e}}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} x\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{8} - \frac{\mathrm{e}}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{1}{2}}\\ &= \frac{1}{8} - \frac{\mathrm{e}}{16} = \frac{2-\mathrm{e}}{16}\end{aligned}$$

b) Puisque h est négative sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan située en dessous de l'axe des abscisses et au-dessus de la courbe $\mathscr{C}$ est

$$\int_0^{\frac{1}{2}} -h(x)\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}-2}{16}$$

Exercice 4 (non spé) 5 points

Partie I : Restitution organisée de connaissances

Soit a, b, c les affixes respectives des points A, B, C tels que $a \neq b$ et $a \neq c$.

$$\begin{array}{rcll} \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) & = & \left(\vec{u}, \overrightarrow{AC}\right) - \left(\vec{u}, \overrightarrow{AB}\right) & \text{relation de Chasles} \\ & = & \arg(c-a) - \arg(b-a) & \text{prérequis} \\ & = & \arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) & \text{propiété des arguments} \end{array}$$

Partie II :

1) a) Soit b' l'affixe du point B', image du point B d'affixe i.
Par définition
$$b' = \frac{\mathrm{i}-1-\mathrm{i}}{\mathrm{i}} = \frac{-1}{\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{i}^2}{\mathrm{i}} = \mathrm{i}$$

b) Soit $z \neq 0$.
Si $z' = 1$, alors $z = z - 1 - \mathrm{i}$, alors $0 = -1 - \mathrm{i}$ IMPOSSIBLE !
Donc
$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad z' \neq 1$$

2) Soit $z \neq 0$.

$$\left|z'\right| = 1 \iff \left|\frac{z-1-\mathrm{i}}{z}\right| = 1 \iff |z-1-\mathrm{i}| = |z| \iff |z-(1+\mathrm{i})| = |z-0|$$

Par interprétation géométrique du module d'un nombre complexe :

$$|z_B - z_A| = AB$$

Ainsi

$$\left|z'\right| = 1 \iff AM = OM \iff M \text{ appartient à la médiatrice du segment } [OA]$$

3) Soit $z \neq 0$.

$$z' \text{ est réel} \iff \left\{\begin{array}{l} z = 1+\mathrm{i} \qquad \textbf{ou} \\ \arg(z') = \arg\left(\dfrac{z-1-\mathrm{i}}{z}\right) = \arg\left(\dfrac{1+\mathrm{i}-z}{0-z}\right) = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. .$$

D'après **Partie I**,

$$z' \text{ est réel} \iff \left\{\begin{array}{l} M = A \qquad \textbf{ou} \\ \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{OM}\right) = k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$z' \text{ est réel} \iff \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{OM} \neq \vec{0} \text{ sont colinéaires} \iff M \in (OA) \text{ et } M \neq O$$

Exercice 4 (spécialité) 5 points

Partie I : Restitution organisée de connaissances

Soit a, b, c, d les affixes respectives des points A, B, C, D, où $a \neq c$ et $b \neq d$.

Condition nécessaire Si s est une similitude directe d'écriture complexe $z' = \alpha z + \beta$, où $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $\beta \in \mathbb{C}$, telle que $s(A) = B$ et $s(C) = D$, alors :

$$\left\{\begin{array}{lll} b & = & \alpha a + \beta \\ d & = & \alpha c + \beta \end{array}\right.$$

— par différence membre à membre —

$$b - d = \alpha(a - c)$$

Puisque $a \neq c$ et $b \neq d$, nécessairement

$$\alpha = \frac{b-d}{a-c} \neq 0 \quad \text{puis} \quad \beta = b - a\alpha = \frac{d(a-c) - a(b-d)}{a-c} = -\frac{ab+cd}{a-c}$$

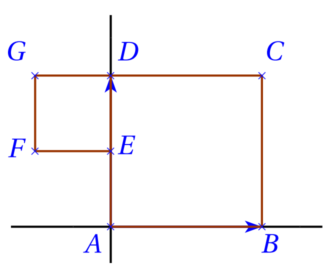
Si s existe, alors elle est unique.

Condition suffisante On vérifie que $z' = \dfrac{b-d}{a-c}z - \dfrac{ab+cd}{a-c}$ est l'écriture complexe d'une similitude directe s du plan qui transforme A en B et C en D.

D'où l'existence de s.

Partie II

1) **a)**



b) $a = 0$; $b = 1$; $c = 1 + \mathrm{i}$; $d = \mathrm{i}$; $e = \frac{1}{2}\mathrm{i}$; $f = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$; $g = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}$.

c) D, F, B, D sont « quatre points » du plan tels que $D \neq F$ et $B \neq D$, alors — **Partie I** — il existe une unique similitude directe s du plan telle que $s(D) = F$ et $s(B) = D$.

2) **a)** Le rapport k de s est égal à

$$k = \frac{FD}{DB} = \frac{\left|d-f\right|}{|b-d|} = \left|\frac{d-f}{b-d}\right| = \cdots = \left|\frac{1}{2}\mathrm{i}\right| = \frac{1}{2}$$

l'angle θ de s est égal à

$$\theta = \left(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{FD}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{FD}\right) - \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DB}\right) = \arg(d-f) - \arg(b-d)$$

$$\theta = \arg\left(\frac{d-f}{b-d}\right) = \arg\left(\frac{1}{2}\mathrm{i}\right) = \frac{\pi}{2} \ [2\pi]$$

b) L'écriture complexe de s est de la forme

$$z' = \alpha z + \beta$$

avec $\alpha = k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \frac{1}{2}\mathrm{i}$ et $\beta \in \mathbb{C}$.

On détermine β en exprimant que $s(B) = D$:

$$\mathrm{i} = \frac{1}{2}\mathrm{i} \times 1 + \beta$$

D'où $\beta = \frac{1}{2}\mathrm{i}$ et l'écriture complexe de s est

$$z' = \frac{1}{2}\mathrm{i}(z+1)$$

c) L'affixe du centre Ω de s est la solution de l'équation :

$$z = \frac{1}{2}\mathrm{i}z + \frac{1}{2}\mathrm{i} \iff \left(1 - \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)z = \frac{1}{2}\mathrm{i}$$

$$\iff z = \frac{\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{i}(2+\mathrm{i})}{5} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}\mathrm{i}$$

Finalement

$$\Omega\left(-\frac{1}{5} + \frac{2}{5}\mathrm{i}\right)$$